

## Ikke-lineær dynamik i elektriske kredsløb (10 point)

Læs venligst de generelle instruktioner i den separate konvolut før du starter på opgaven.

### Introduktion

Bi-stabile ikke-lineære halvlederkomponenter (fx thyristorer) benyttes ofte i elektronik som kontakter og frekvensgeneratorer. Thyristorer benyttes primært til at kontrollere vekselstrøm (AC) i elektronik, fx ensretning af AC strømme til DC strømme ved store effekter. Bi-stabile komponenter kan også benyttes som modeller for selv-organiserende fænomener i fysik (dette emne indgår i del B af opgave), biologi (se del C) og andre områder af moderne ikke-lineær naturvidenskab.

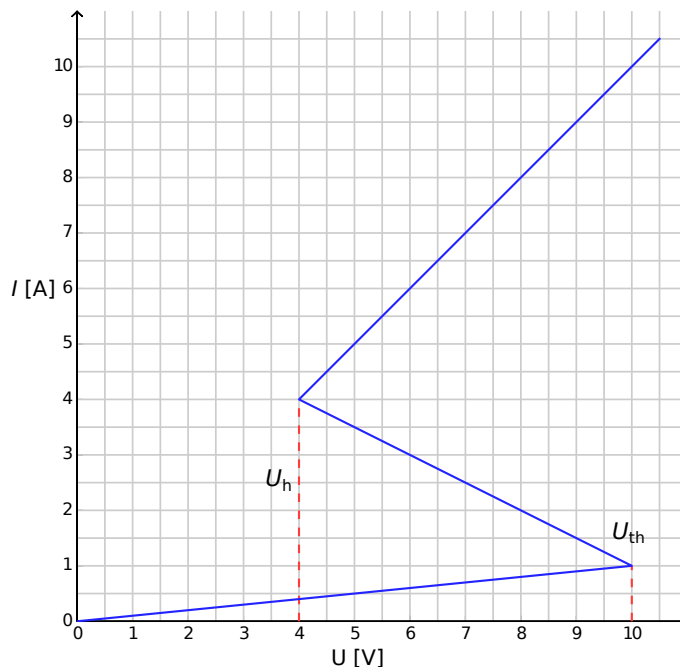
### Formål

At undersøge instabiliteter og ikke-triviell dynamik i kredsløb som indeholder komponenter med ikke-lineære  $I - V$  karakteristikker. At opdage mulige anvendelser af sådanne kredsløb i ingeniørvidenskab og i modeller af biologiske systemer.

### Del A. Stationære tilstande og instabiliteter (3 point)

Fig. 1 viser den såkaldte **S-formede**  $I - V$  karakteristik af en ikke-lineær komponent  $X$ .

I spændingsområdet mellem  $U_h = 4,00 \text{ V}$  (se Fig. 1) og  $U_{th} = 10,0 \text{ V}$  (se Fig. 1) har  $I - V$  karakteristikken flere mulige værdier af strømmen for en given spænding. Det kan her antages, at karakteristikken vist på figur 1 består af rette linjestykker. Det oplyses, at det øvre linjestykke går igennem koordinatsystemets begyndelsespunkt, hvis det forlænges. Denne antagelse er en god tilnærmelse til virkelige thyristorers opførsel.



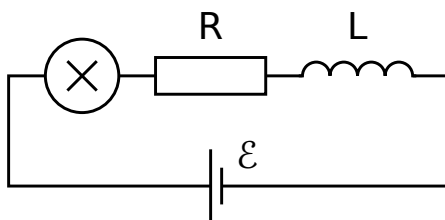
Figur 1:  $I - V$  karakteristik af den ikke-lineære komponent betegnet  $X$ .

- A.1** Bestem resistansen  $R_{\text{on}}$  af komponenten  $X$  for den øverste del af  $I - V$  karakteristikken ved at benytte grafen. Bestem også resistansen  $R_{\text{off}}$  for den nederste del af karakteristikkene. Den midterste del er beskrevet ved ligningen

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

Bestem værdierne af størrelserne  $I_0$  og  $R_{\text{int}}$ .

Komponenten  $X$  er forbundet i serie med en resistor med resistans  $R$ , en spole med induktans  $L$  og en spændingskilde med den konstante spænding  $\mathcal{E}$  (se Fig.2). Man definerer kredsløbet til at være i en stationær tilstand, når strømmen som funktion af tiden er konstant, dvs.  $I(t) = \text{const.}$



Figur 2: Kredsløb med komponenten  $X$ , resistoren  $R$ , spolen  $L$  og spændingskilden  $\mathcal{E}$ .

- A.2** Hvor mange stationære tilstande kan der maksimalt være for kredsløbet på Fig. 2, når  $\mathcal{E}$  er konstant og  $R = 3,00 \Omega$ ? 1pt  
Hvad vil svaret være, hvis  $R = 1,00 \Omega$ ?

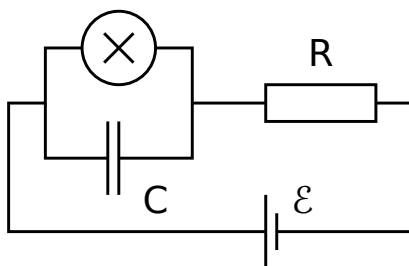
- A.3** Lad  $R = 3,00 \Omega$ ,  $L = 1,00 \mu\text{H}$  og  $\mathcal{E} = 15,0 \text{ V}$  i kredsløbet vist på Fig. 2. Bestem værdien af strømmen  $I_{\text{stationær}}$  og spændingen  $V_{\text{stationær}}$  for den ikke-lineære komponent  $X$  i den stationære tilstand. 0.6pt

Kredsløbet på Fig. 2 er til at begynde med i den stationære tilstand med  $I(t) = I_{\text{stationær}}$ . Denne stationære tilstand siges at være stabil, hvis den efter en lille ændring (forøgelse eller formindskelse af strømmen) vender tilbage til den stationære tilstand. Hvis systemet derimod efter en lille ændring af strømmen fortsætter med at bevæge sig væk fra den stationære tilstand siges denne at være ustabil.

- A.4** Benyt talværdierne fra spørgsmål **A.3** til at undersøge stabiliteten af den stationære tilstand med  $I(t) = I_{\text{stationær}}$ . Er den stationære tilstand stabil eller ustabil? 1pt

## Del B. Bi-stabile ikke-lineære komponenter i fysik: radiosender (5 point)

Vi vil nu undersøge et andet kredsløb (se Fig. 3). Her forbindes den ikke-lineære komponent parallelt med en kapacitor med kapacitans  $C = 1,00 \mu\text{F}$ . Disse to parallelle komponenter er forbundet i serie med en resistor med resistans  $R = 3,00 \Omega$  og en konstant spændingskilde med spændingen  $\mathcal{E} = 15,0 \text{ V}$ . Det viser sig, at kredsløbet oscillerer, idet den ikke-lineære komponent springer frem og tilbage mellem to forskellige dele af  $I - V$  karakteristikken i løbet af en periode.



Figur 3: Kredsløb med den ikke-lineære komponent  $X$ , kapacitoren  $C$ , resistoren  $R$  og spændingskilden  $\mathcal{E}$ .

- B.1** Tegn på  $I - V$  grafen hvordan oscillationen af den ikke-lineære komponent forløber rundt i løbet af en periode (du skal også angive retningen (med eller mod uret)). Begrund dit svar med formler og skitser. 1.8pt

- B.2** Udled udtryk for de tidsrum  $t_1$  og  $t_2$  som systemet tilbringer på hver del af  $I - V$  grafen i løbet af en periode. Bestem også talværdierne for de to tidsrum. Bestem størrelsen af perioden  $T$ . Man kan se bort fra den tid, som det tager at hoppe mellem delene på  $I - V$  grafen. 1.9pt

- B.3** Estimer den gennemsnitlige effekt  $P$ , som bliver afsat i den ikke-lineære komponent i løbet af en periode. Det er tilstrækkeligt at angive den korrekte størrelsesorden. 0.7pt

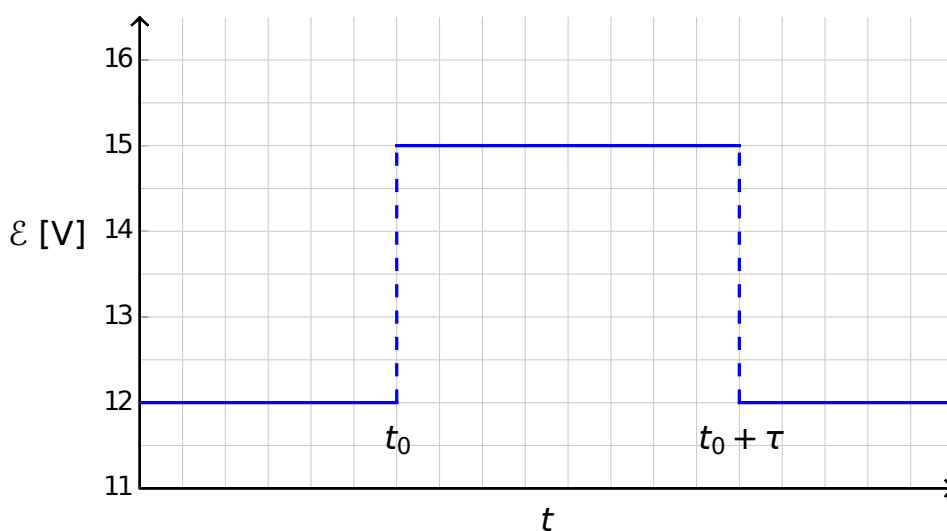
Kredsløbet på Fig. 3 bruges til at lave en radiosender. For at opnå dette forbindes den ikke-lineære komponent  $X$  med en retlinet antenne med længden  $s$ . Den anden ende af antennen er fri. I antennen dannes en stående elektromagnetisk bølge. Farten af den elektromagnetiske bølge, der løber i antennen, er den samme som i vakuum. Senderen benytter grundtonen i den harmoniske svingning med perioden  $T$  fra spørgsmål B.2.

- B.4** Hvad er den optimale værdi  $s$ , idet det oplyses, den er under 1 km? 0.6pt

### Del C. Bi-stabile ikke-lineære komponenter i biologi: neuristor (2 point)

I denne del af opgaven betragter vi anvendelsen af bi-stabile ikke-lineære elementer til at lave en model af biologiske processer. En neuron i den menneskelige hjerne har følgende egenskab: Når den stimuleres af et ydre signal foretager neuronen en enkelt oscillation og vender derefter tilbage til sin oprindelige tilstand. Herved kan pulser rejse gennem det neurale netværk bestående af de forbundne neuroner. En halvlederchip, der er designet til at simulere de nævnte egenskaber, kaldes en *neuristor* (sproglig sammentrækning af ordene neuron og transistor).

Vi benytter den ikke-lineære komponent  $X$  fra før til at lave en model af en simpel neuristor. For at opnå dette sænkes spænding  $\mathcal{E}$  i kredsløbet vist på Fig. 3 til værdien  $\mathcal{E}' = 12,0 \text{ V}$ . Oscillationerne stopper og systemet når sin stationære tilstand. Nu øges spændingen hurtigt tilbage til værdien  $\mathcal{E} = 15,0 \text{ V}$ , og efter en tidsrum  $\tau$  (med  $\tau < T$ ) mindskes spændingen hurtigt tilbage til værdien  $\mathcal{E}'$  (se Fig. 4, en firkantspænding). Det viser sig, at der er en bestemt kritisk værdi,  $\tau_{\text{krit.}}$ , hvor systemet udviser helt forskellig opførsel for henholdsvis  $\tau < \tau_{\text{krit.}}$  og  $\tau > \tau_{\text{krit.}}$



Figur 4: Spændingen fra spændingskilden som funktion af tiden.

- |            |  |       |
|------------|--|-------|
| <b>C.1</b> | Tegn graferne for tidsafhængigheden af strømmen $I_X(t)$ gennem den ikke-lineære komponent $X$ for både $\tau < \tau_{\text{krit}}$ og for $\tau > \tau_{\text{krit}}$ . | 1.2pt |
| <b>C.2</b> | Bestem et formeludtryk for den kritiske tid $\tau_{\text{krit}}$ og beregn den numeriske værdi af $\tau_{\text{krit}}$ .   | 0.6pt |
| <b>C.3</b> | Er kredsløbet med $\tau = 1,00 \times 10^{-6}$ s en neuristor?   | 0.2pt |