Vand og objekter

Denne opgave omhandler fænomener, der relaterer til interaktioner mellem vand og objekter i forbindelse med overfladespænding.

Del A omhandler bevægelse, mens del B og C omhandler statiske situationer.

Hvis det er nødvendigt, kan du udnytte at såfremt en funktion $y(x)$ opfylder differentialligningen

$y''(x) = ay(x)$, hvor (a er en positiv konstant), så er den generelle løsning givet på formen

$y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$, hvor A og B er vilkårlige konstanter.

Part A. Sammensmeltning af vanddråber (2.0 point)

Vi betragter to stationære, sfæriske vanddråber på overfladen af et super hydrofobt materiale, som vist på Fig.1. I denne situation eksisterer der stærke frastødende kræfter mellem materialet og vand.

Til at begynde med placeres to identiske sfæriske vanddråber på overfladen tæt på hinanden. Når de to dråber bringes til at berøre hinanden, vil de ”smelte” sammen og danne en større sfærisk vanddråbe, der umiddelbart iagttages at hoppe op fra overfladen.

A.1	Radius a af begge vanddråber før sammensmeltningen er $100\ \mu$m. Vands densitet ρ = 1.00×10^3 kg/m^3. Overfladespændingen γ = 7.27×10^{-2} J/m^2. Lad ΔE betegne forskellen i overfladeenergi før og efter sammensmeltningen. En andel k af energien, ΔE, omdannes til kinetisk energi af den sammensmeltede vanddråbe. Denne bevæger sig opad med spring-op-hastighed v til begyndelses tidspunktet. Bestem denne spring-op-hastighed v med to betydende cifre under følgende antagelser: • $k = 0.06$. • Massen af vandet før og efter sammensmeltningen er bevaret.	2.0pt

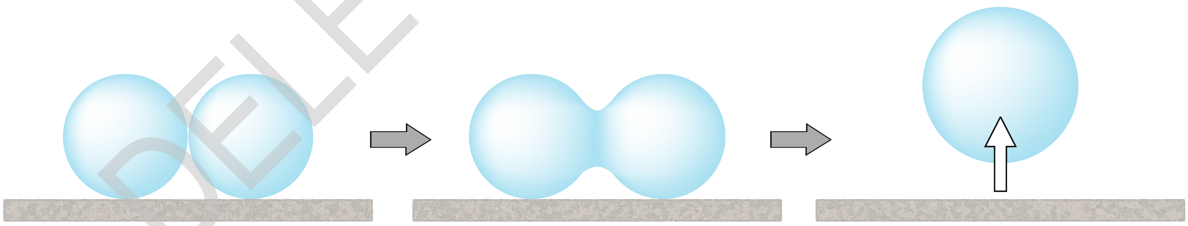

Fig. 1: Sammensmeltning af to vanddråber og hop af den sammenlagte vanddråbe.

Part B. En lodret placeret plade (4.5 points)

En tynd plade nedsænkes lodret i vand. Figur 2(a) og 2(b) viser henholdsvis vandoverfladeformer for de hydrofile (tiltrækkende) og hydrofobe (frastødende) pladematerialer. Der kan ses bort fra pladetykkelsen.

Den nedsænkede plade er placeret i yz -planen, og den horisontale vandoverflade langt væk fra den nedsænkede plade ligger i xy -planen med $z = 0$. Vandoverfladens form afhænger således ikke af y-koordinaten. Lad $\theta(x)$ betegne vinklen mellem vandoverfladen og det horizontale plan i punktet (x, z) i vandoverfladen i xz -planen. Her måles $\theta(x)$ i forhold til den positive x -akse og rotation imod uret regnes som positiv. Lad θ_0 betegne værdien af $\theta(x)$ i kontaktpunktet mellem den nedsænkede plade og vandoverfladen ($x = 0$).

I det følgende er vinklen θ_0 bestemt af materialet pladen er lavet af og kan opfattes som en materiale-konstant.

Vands densitet ρ er konstant og vandoverfladespændingen γ er ensartet. Tyngdeaccelerationen er konstant og givet ved g. Det atmosfæriske tryk P_0 antages at være konstant. Vi bestemmer nu vandoverfladens form. Bemærk at enheden for overfladespænding er J/m^2, der også kan skrives som N/m.

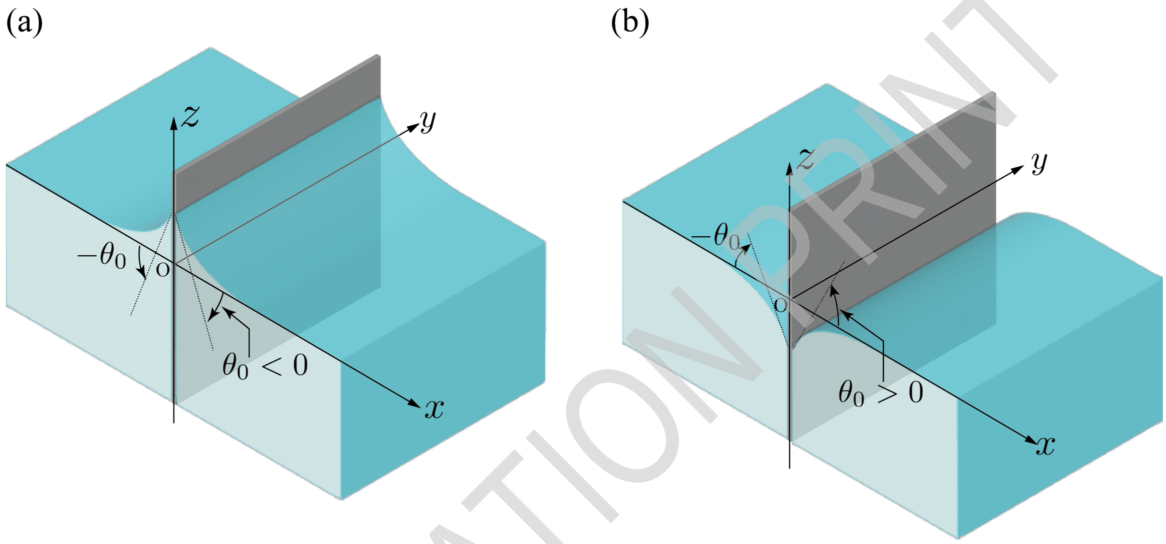

Fig. 2: Vertikalt nedsænkede plader i vand.

(a) Tilfældet med en hydrofil plade

(b) Tilfældet med en hydrofob plade

B.1	Vi betragter en hydrofil nedsænket plade, som vist på Fig.2(a). Bemærk at vandtrykket , P, opfylder $P < P_0$ for $z > 0$ og $P = P_0$ for $z = 0$. Udtryk P som funktion af z ved hjælp af størrelserne P_0, ρ, g, z.	0.6pt

B.2	Vi betragter nu en vandblok/(udsnit), hvis udskæring er vist som skraveret i Fig.3(a). Vandblokkens plane tværsnit i xz -planen er vist som et skraveret område på Fig.3(b). Lad z_1 og z_2 henholdsvis betegne de venstre og højre kantkoordinater for grænsen (i vandoverfladen) mellem vandblokken og luften. Bestem et udtryk for den horizontale *x*-komponent af kraften pr.længdeenhed langs y-aksen , f_x, som udøves på vandblokken på grund af trykket. Du skal udtrykke f_x ved størrelserne ρ, g, z_1, z_2. Bemærk at det atmosfæriske tryk P_0 ikke udøver noget bidrag til den horizontale kraft på vandblokken!	0.8pt

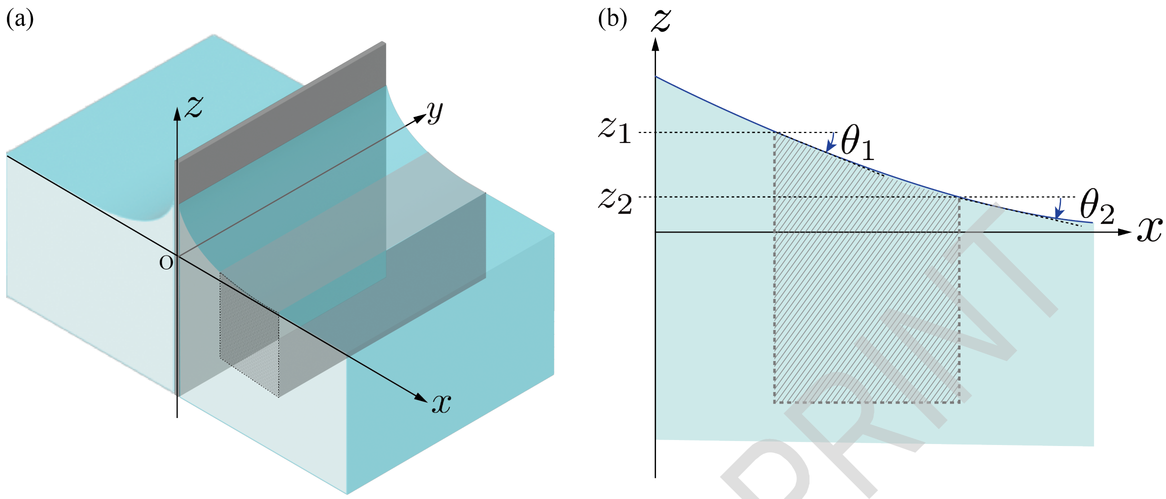

Fig. 3: Udskåret form af vandblok i vandoverfladen. (a) Fugleperspektiv og (b) tværsnitsbillede.

B.3 Overfladespændingen, der virker på vandblokken, afbalanceres af kraften pr.længdeenhed langs y-aksen, f_x, som er beskrevet i B.2. Vi definerer henholdsvis θ_1 og θ_2 som vinklerne mellem vandoverfladen og det vandrette plan ved venstre og højre kant. Udtryk f_x vha. af størrelserne γ, θ_1, og θ_2. **0.8pt**

B.4 Følgende ligning gælder for et vilkårligt punkt (x, z) på vandoverfladen, **0.8pt**

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^a + \cos\theta(x) = \text{constant}. \tag{1}$$

Bestem eksponenten a, og udtryk konstanten ℓ alene ved hjælp af størrelserne γ, ρ, g.
(Bemærk, at denne ligning gælder uanset, om pladematerialet er hydrofilt eller hydrofobt.)

B.5 Antag at variationer i vandoverfladen er langsomme, d.v.s. $|z'(x)| \ll 1$. I ligning (1) i B.4 kan vi derfor Taylorudvikle $\cos\theta(x)$ som funktion af $z'(x)$ til anden orden. Ved at differentiere den resulterende ligning m.h.t. x opnås en differentialligning for $z(x)$. **1.5pt**
Løs denne differentialligning og bestem $z(x)$ for $x \geq 0$ ved hjælp af $\tan\theta_0$ og ℓ.
(Bemærk at de lodrette retninger i figur 2 og 3 er overdrevet for at opnå en bedre illustration og opfylder ikke $|z'(x)| \ll 1$).

Del C. Påvirkning mellem to stænger (3.5 point)

To identiske stænger A og B, der er lavet af det samme materiale, flyder parallelt med hinanden i vandoverfladen. De er placeret i samme afstand fra y-aksen (Fig.4).

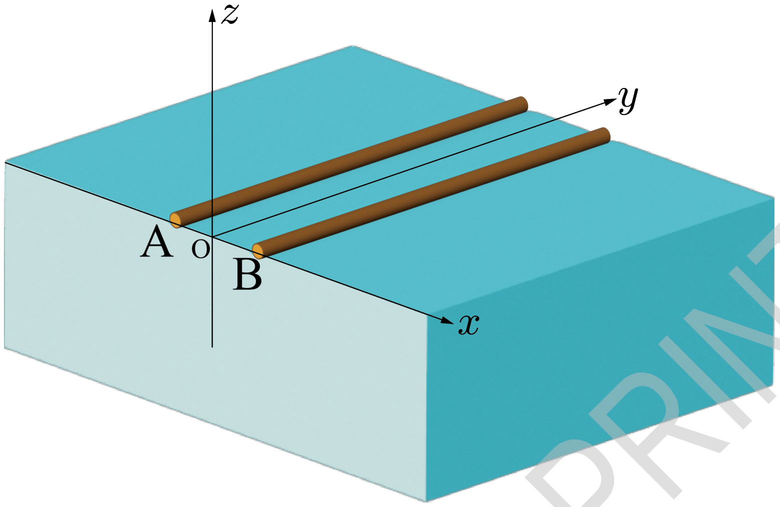

Fig. 4: Hvis to stænger A og B flyder i vandoverfladen som vist, vil de blive bragt imod hinanden.

C.1	For kontaktpunkterne mellem stang B of vandoverfladen definerer vi z-koordinaterne z_a og z_b og vinklerne θ_a og θ_b, se figur 5. Bestem den vandrette komponent af kraften pr. længdeenhed langs y-aksen, F_x, på stangen B. Dit svar skal udtrykkes ved hjælp af størrelserne θ_a, θ_b, z_a, z_b, ρ, g, og γ.	1.0pt

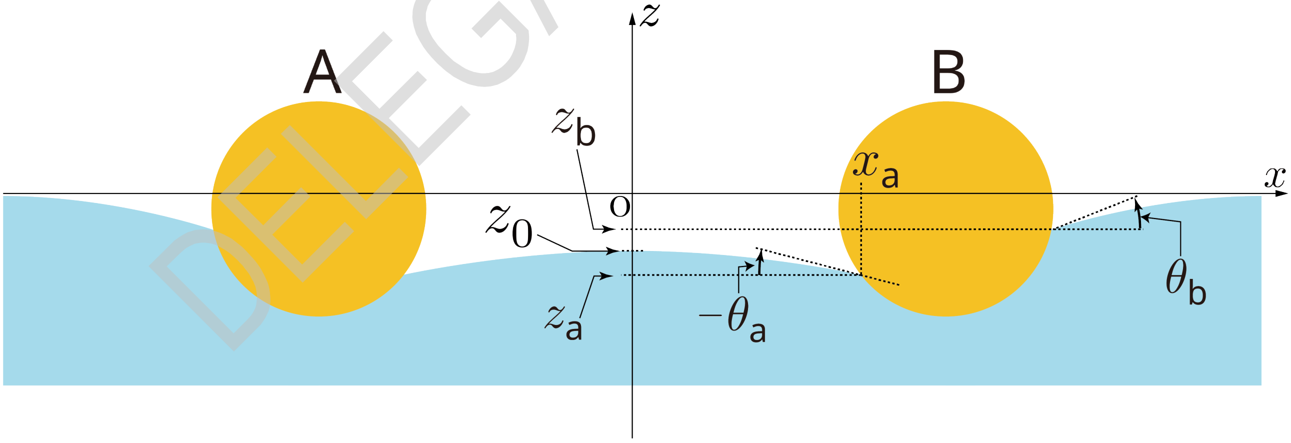

Fig. 5: Lodret tværsnit af to stænger, der flyder i vandoverfladen.

C.2	lad z_0 betegne vandoverfladehøjden ved midtpunktet mellem de to stænger i xz planen. Udtryk kraften pr. længdeenhed langs y-aksen, F_x, opnået i C.1 på simplere vis, <u>uden</u> brug af størrelserne θ_a, θ_b, z_a, og z_b.	1.5pt

C.3	Lad x_{a} være x-koordinaten for kontaktpunktet mellem vandoverfladen og den venstre ende af stangen B. Udnyt differentialligningen fra B.4 til at udtrykke vandstandskoordinaten z_0 for midtpunktet af disse to stænger A og B som funktion af x_{a} og z_{a}. Udtryk dit svar vha. konstanten ℓ, der blev introduceret i B.4.	1.0pt