Neutronstjerner (10 point)

Opgaven omhandler stabiliteten af store atomkerner og estimering af massen af neutronstjerner teoretisk og eksperimentelt.

Del A. Masse og stabilitet af atomkerner (2.5 point)

Hvileenergien $m(Z,N)c^2$ (hvor c betegner lysets fart i vakuum) af en atomkerne bestående af Z protoner og N neutroner er mindre end summen af hvileenergierne af protonerne og neutronerne (herefter benævnt nukleonerne). Forskellen er bindingsenergien $B(Z,N)$. Hvis man ser bort fra mindre korrektioner, kan man opstille en tilnærmet formel for bindingsenergien af en atomkerne, bestående af volumenled, et overfladeled, et coulombled og et symmetriled, som henholdsvis har koefficienterne a_V, a_S, a_C og a_{sym} :

$$m(Z,N)c^2 = Am_N c^2 - B(Z,N), \qquad B(Z,N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}, \tag{1}$$

Her er $A = Z + N$ massetallet og m_N er massen af en kernepartikel. Ved beregninger benyttes følgende værdier: $a_V \approx 15.8\ \text{MeV}$, $a_S \approx 17.8\ \text{MeV}$, $a_C \approx 0.711\ \text{MeV}$, og $a_{\text{sym}} \approx 23.7\ \text{MeV}$ (MeV = 10^6 elektronvolt).

A.1	Antag, at $Z = N$. Bestem den værdi af A, for hvilken bindingsenergien pr. nukleon, B/A , har maksimum.	0.9pt

A.2	Antag, at A er konstant. Bestem den værdi Z^* af atomnummeret, for hvilken $B(Z, A-Z)$ har maksimum. Beregn for $A = 197$ værdien af Z^* ved at benytte ligning (1).	0.9pt

A.3 En atomkerne med en stor værdi af A kan dele sig i lettere atomkerner gennem fission for at minimere den samlede hvilemasseenergi. Som en forenkling ser vi på det tilfælde (blandt mange andre muligheder) hvor en atomkerne deler sig i to lige store atomkerner. Dette sker, når følgende energirelation er gyldig **(0.7pt)**

$$m(Z,N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2,$$

Ovenstående relation kan omskrives til:

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_S}{a_C},$$

Bestem C_{fission} med to betydende cifre.

Del B, En neutronstjerne som en gigantisk kerne (1.5 point)

For store atomkerner med tilstrækkeligt store massetal $A > A_c$ vil atomkerner med massetal over tærskelværdien A_c være stabile på grund af gravitationskraftens bidrag til bindingsenergien.

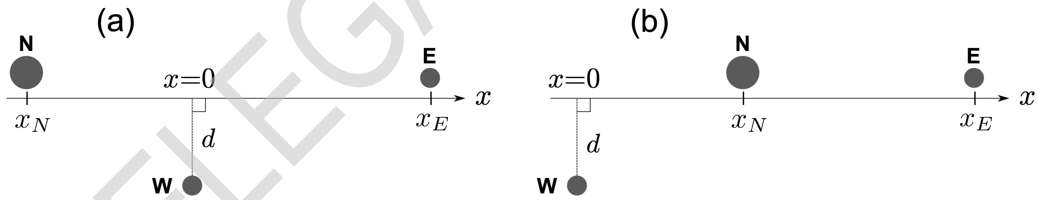
B.1 Antag, at $N = A$ og at $Z = 0$ for tilstrækkeligt store værdier af A og at ligning (1) stadig er gyldig, nu med et bidrag til bindingsenergien hidrørende fra gravitationskraften på **1.5pt**

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R},$$

hvor $M = m_N A$ og $R = R_0 A^{1/3}$ med $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15}$ m $= 1.1$ fm er henholdsvis massen og radius af atomkernen.
Bestem for $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$ værdien af a_{grav} (målt i MeV) med ét betydende ciffer.
Se nu bort fra overfladeleddet. Bestem herved A_c med ét betydende ciffer. Benyt ved udregningen, at $m_N c^2 \simeq 939$ MeV og $G = \hbar c / M_P^2$ hvor $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22}$ MeV og $\hbar c \simeq 197$ MeV $\cdot$ fm.

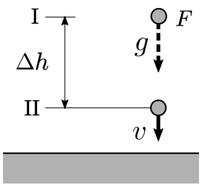
Del C. Neutronstjerne i et dobbeltstjernesystem (6.0 point)

Visse neutronstjerner er pulsarer, der udsender elektromagnetiske pulser ("lys") med en konstant periode. Neutronstjerner danner ofte et dobbeltstjernesystem med en hvid dværgstjerne. Betragt et dobbeltstjernesystem bestående af en neutronstjerne og en hvid dværgstjerne, som vist på figur 1. En lyspuls fra neutronstjernen **N** til Jorden **E** passerer forbi den hvide dværgstjerne **W** i dobbeltstjernesystemet. Tidsintervallet mellem modtagelsen af hver puls påvirkes af tilstedeværelsen af den hvide dværgstjernes gravitationsfelt. Måling af denne tidsforskel fører til en præcis bestemmelse af massen af **W**, og dermed til, at massen af **N** kan estimeres.



Diagrammer, med x-aksen langs forbindelseslinjen mellem **N** og **E**: (a) når $x_N < 0$ og (b) når $x_N > 0$.

C.1 Figuren herunder viser et homogent gravitationsfelt med tyngdeacceleration g. Betragt to forskellige højder I og II, med en højdeforskel $\Delta h (> 0)$. Placér identiske ure ved I, II og F, Urene betegnes respektivt ur-I og ur-II, og ur-F. 1.0pt



Forsøgsopstilling til tankeeksperiment.

Antag, at en observatør sidder med ur-F i hvile i samme højde som ur-I. Da urene er identiske, registrerer de samme tidsintervaller, så $\Delta\tau_F = \Delta\tau_{\mathrm{I}}$.
Nu falder observatøren med ur-F . Et koordinatsystem som følger med F betragtes instantant som et inertialsystem, når det passerer II med farten v . Set fra F vil II på dette tidspunkt bevæge sig opad med farten v, så tidsforkortelsen af ur-II kan bestemmes ud fra Lorentztransformationen. Når der er gået tiden $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$ på ur-F, vil der være gået tiden $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ på ur-II.
Bestem $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ udtrykt ved $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$ til første orden i $\Delta\phi/c^2$, hvor $\Delta\phi = g\Delta h$ er forskellen i gravitationspotentialet, dvs. den gravitationelle potentielle energi pr. masse.

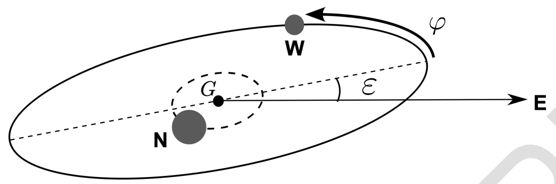
C.2 Selv om den lokale fart af lyset er c, vil tilstedeværelsen af et gravitationelt potential ϕ ændre lysets effektive fart målt uendelig lagt væk fra neutronstjernen til værdien c_{eff}. Når $\phi(r = \infty) = 0$ er c_{eff} til første orden i ϕ/c^2 givet ved udtrykket 1.8pt

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c$$

Her er inkluderet effekter fra rummets krumning, som ikke var medtaget i **C.1.**
Bemærk, at lysets bane i det følgende kan approksimeres med en ret linje.
Som vist på figur 1 (a) placeres x-aksen langs lysets vej fra neutronstjernen **N** til Jorden **E**, med $x = 0$ i det punkt, hvor den hvide dværgstjerne **W** er tættest på lysets bane. Lad $x_N\ (< 0)$ være x-koordinaten for **N**, $x_E\ (> 0)$ være x-koordinaten for **E** og d den vinkelrette afstand fra **W** til lysets bane.
Estimér ændringen Δt i ankomsttiden af signalet fra **N** til **E** forårsaget af tilstedeværelsen af den hvide dværgstjerne med masse M_{WD}. Angiv dit svar til første orden, idet der gælder, at: $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$, og $GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$. Du får muligvis brug for følgende formel:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x}\right) + C. \qquad (\log \text{ is the natural logarithm})$$

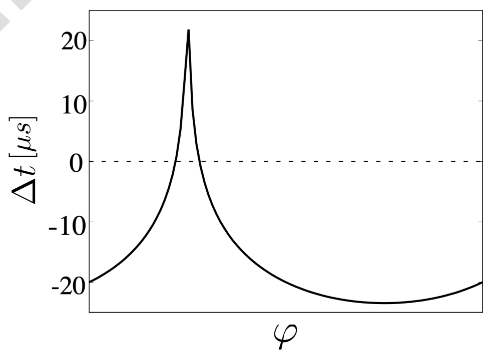
C.3 Antag, at neutronstjerne **N** og den hvide dværgstjerne **W** i dobbeltstjernesystemet bevæger sig i cirkelbaner omkring deres fælles massemidtpunkt G. Baneplanet har den lille hældning ε i forhold til sigtelinjen fra G til **E.** Lad L være afstanden mellem **N** og **W**, og lad $M_{\rm WD}$ være massen af den hvide dværgstjerne. I det følgende antages, at $\varepsilon \ll 1$. 1.8pt



Dobbeltstjernesystemet.

Vi observerer i **E** lyspulser fra **N**. Afstanden mellem **N** og **E** er meget stor, og lysets bane varierer med tiden, afhængig af positionen af **N** og **W**. Forsinkelsen af tiden mellem modtagelsen af to lyspulser, der ankommer til **E**, har sin største værdi $\Delta t_{\rm max}$, når $x_N \simeq -L$ og sin mindste værdi $\Delta t_{\rm min}$, når $x_N \simeq L$ (se figur 1(b) for denne konfiguration).
Udled et udtryk for forskellen $\Delta t_{\rm max} - \Delta t_{\rm min}$ til første orden ved at udnytte, at en række størrelser er små (som i **C.2**). Det antages, at der ikke er andre objekter end **W**, der påvirker $\Delta t_{\rm max} - \Delta t_{\rm min}$.

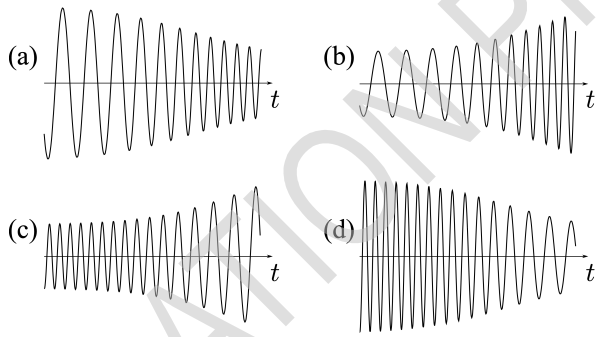
C.4 Figuren herunder viser observationer af tidsforsinkelsen som funktion af de to stjerners vinkelposition φ .
$L \approx 6 \times 10^6\,\mathrm{km}$ og $\cos\varepsilon \approx 0.99989$. Estimér $M_{\rm WD}$ (målt i enheder af Solens masse $M_\odot$), og angiv resultatet for $M_{\rm WD}/M_\odot$ med ét betydende ciffer. Benyt approksimationen $GM_\odot/c^3 \approx 5\,\mu\mathrm{s}$. 0.8pt



Den observerede tidsforsinkelse Δt som funktion af vinkelposition φ af **N** og **W** (se figuren i **C.3**)

C.5 I et dobbeltstjernesystem bestående af to neutronstjerner vil de to neutronstjerner miste energi og impulsmoment ved at udsende gravitationsbølger, og til sidst vil de to neutronstjerner kollidere. Antag en simpel banebevægelse med radius R og vinkelhastighed ω, så $\omega = \chi R^p$, hvor χ er en konstant, der ikke afhænger af hverken ω eller R, når man ser bort fra relativistiske effekter.
Bestem talværdien af p. 0.4pt

C.6 Amplituden af den udsendte gravitationsbølge fra dobbeltstjernesystemet i **C.5** er proportional med $R^2\omega^2$. Figuren herunder viser kvalitativt fire forskellige tidsudviklinger af de observerede gravitationsbølger lige før de to neutronstjerner kolliderer. Vælg den tidsudvikling blandt (a) til (d), der passer bedst til den ovenfor beskrevne situation. 0.2pt



De mulige observerede tidsudviklinger af gravitationsbølgerne.