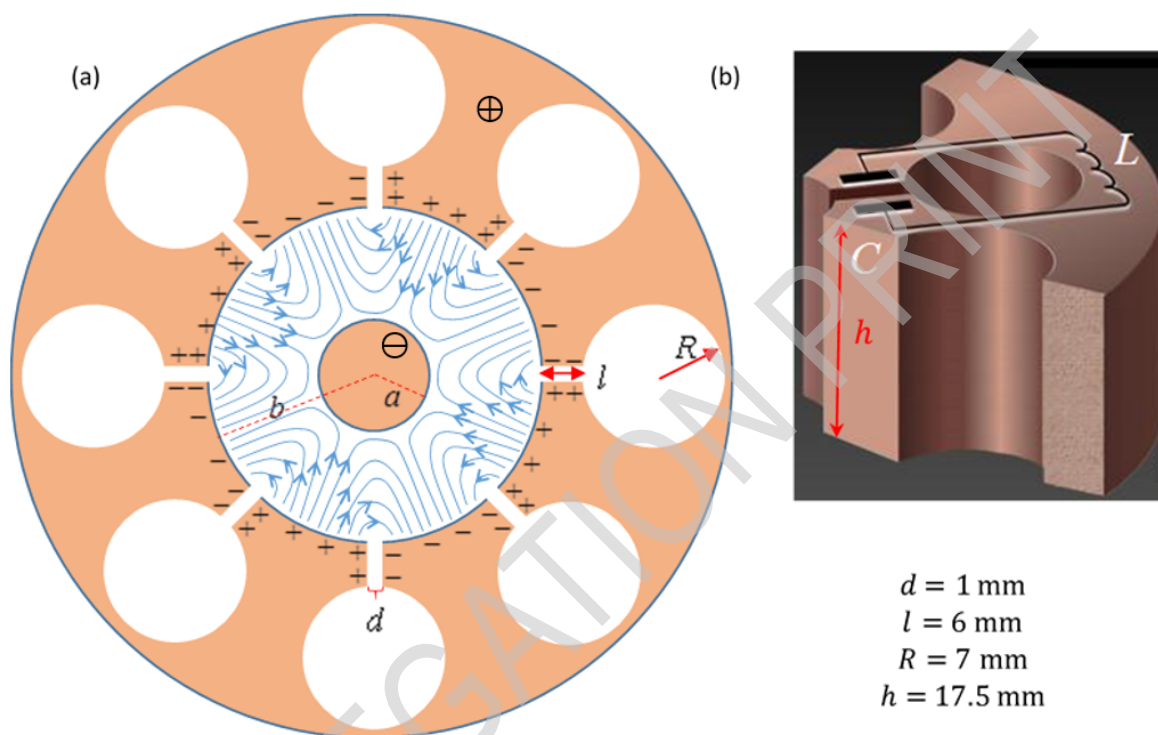


Mikrobølgeovnens fysik

Denne opgave drejer sig om frembringelse af mikrobølger i en ovn samt anvendelse til opvarmning af mad. Frembringelse af mikrobølger foregår i en "magnetron", hvilket er emnet i del A. Absorption i fødevarer er emnet for del B.



Figur 1

Del A: Magnetronens opbygning og virkemåde (6.6 points)

En magnetron frembringer mikrobølgestråling (enten pulserende for radar, eller konstant for en mikrobølgeovn). Magnetronen fungerer ved selvforstærkende elektriske svingninger. En sådan svingningstilstand kan opstå ved at tilføje et radiale, statisk elektrisk felt samt et konstant, akseparallel magnetfelt.

Magnetronen består af en cylindrisk, massiv katode af kobber med radius a omgivet af en anode med radius $b > a$. Anoden er en tyk, cylindrisk skal af kobber, hvor der er udboret otte cylindriske hulrum, også kaldet "resonatorer" eller bølgeledere. En af disse (parallelkoblede) resonatorer er tilkoblet en antenne, som udsender mikrobølgestrålingen. Mellemrum og hulrum er lufttomme. Se figur 1(a). På figur 1(b) ses hvordan kobberet rundt om et hulrum fungerer som en elektrisk svingningskreds, nemlig en LC-kreds.

Et statisk magnetfelt parallelt med symmetriaksen peger ud af papiret på figur 1(a). Hertil kommer en konstant potentialforskel mellem katoden og den omgivende anode, som frembringer et radiale elektrisk felt. Elektroner udsendt fra katoden kan ramme anoden og derved excitere svingninger i LC-kredsene rundt om hvert hulrum. Disse svingninger, skal vi se, kan virke selvforstærkende.

Herved kan et oscillerende elektrisk felt opstå i mellemrummet mellem katode og anode udover det konstante, radiale felt (de blå feltlinjer i figur 1(a) er fra det oscillerende felt; det statiske felt er ikke indtegnet). Når oscillationerne foregår "steady state", vil den typiske amplitude omtrent være lig med det konstante, påtrykte felt. Selve elektronbevægelsen afhænger af såvel det statiske felt som af det

frembragte oscillerende felt. Det vil få elektronerne, som når frem til anoden, til at aflevere omtrent samme energi, som de alene ville få fra det statiske felt. Nogle få af de udsendte elektroner vender tilbage til katoden og løsriver yderligere ekstra elektroner i en selvforstærkende proces.

Hver resonator kan tænkes opbygget som en LC-kreds, se figur 1(b). Kapacitansen består af mellemrummet mellem de to ender af hulrummet, mens induktansen består af den ledende forbindelse mellem de to ender. Man kan antage at strømmen finder sted nær overfladen af hulrummet, jævnt fordelt som om hulrummets flade er en solenoide med uendelig mange vindinger, hver med en uendelig lille strøm. De geometriske fremgår af figur 1(b). Vakuumpervitativiteten er $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ og vakuumpermeabiliteten $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$

- A.1** Anvend overstående data til at vurdere frekvensen for en enkelt LC-kreds. 0.4pt
(Dit resultat kan afvige fra faktiske frekvens som er 2.45 GHz. Benyt denne værdi i resten af opgaven)

Spørgsmål A.2 er mere generelt og handler ikke specielt om magnetronen, men skal betragtes som hjælp til at indføre noget af den relevante fysik.

Betrakt en fri elektron, som bevæger sig under påvirkning af et konstant elektrisk felt i y -aksens negative retning, $\vec{E} = -E_0 \hat{y}$, samt et konstant magnetfelt i z -aksens positive retning, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. Driftshastigheden \vec{u}_D for en elektron defineres som den gennemsnitlige hastighed.

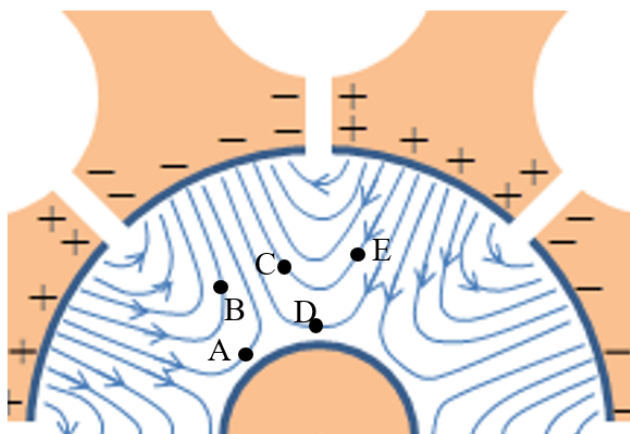
- A.2** Find \vec{u}_D for hver af de to følgende situationer, og tegn i svararket elektronbanerne i tidsintervallet $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$ i følgende to situationer: 1.5pt
1. For $t = 0$ er elektronens hastighed $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$,
 2. For $t = 0$ er elektronens hastighed $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$.

Vi vender nu tilbage til magnetronen: Afstanden mellem katoden og anoden er 15 mm.

Antag, at tabet i elektronens kinetiske energi maksimalt er $K_{\text{max}} = 800 \text{ eV}$.

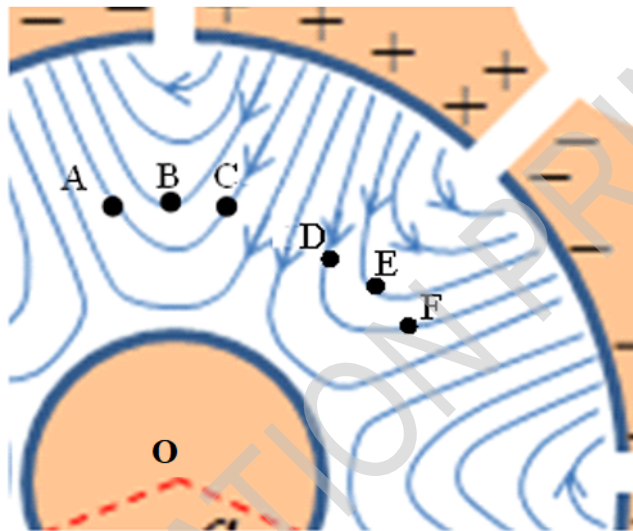
Det statiske magnetfelt er $B_0 = 0.3 \text{ T}$, elektronens masse er $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, og ladningen er $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

- A.3** Vurder den største værdi af radius r af elektronbanen i det medfølgende koordinatsystem, hvori bevægelsen med tilnærmelse er cirkulær. 0.4pt



Figur 2

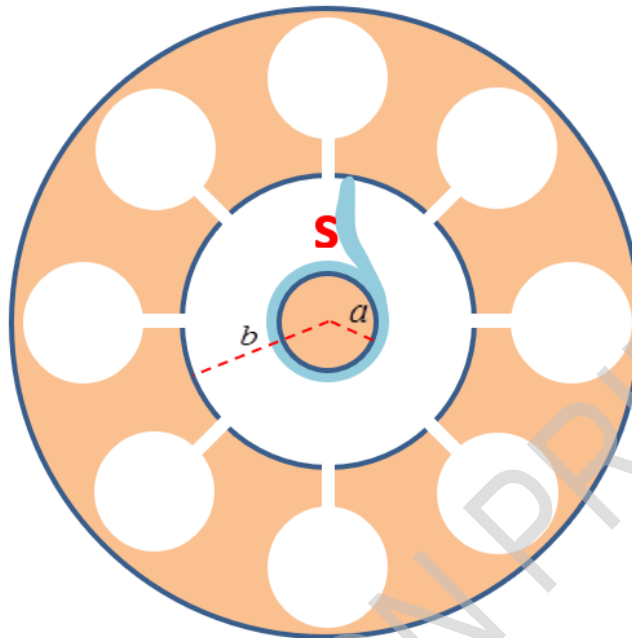
- A.4** Figur 2 viser et øjebliksbillede af det oscillerende elektriske felt i mellemrummet mellem den centrale katode og den omgivende anode (det statiske elektriske felt er ikke indtegnet). Vis på svararket hvilke elektroner med positionerne A, B, C, D eller E, der vil bevæge sig mod anoden, hvilke der vil bevæge sig mod katoden, og hvilke af dem som vil bevæge sig vinkelret på radius på dette tidspunkt. 1.2pt



Figur 3

Figur 3 viser et øjebliksbillede af de elektriske feltlinjer (det statiske felt er ikke indtegnet). Seks elektroner befinder sig positionerne A, B, C, D, E og F. Alle elektroner befinder sig i samme afstand fra katoden.

- A.5** Vis på svararket for hvert par af elektroner, AB, AC, BC, DE, DF og EF om deres driftbevægelse vil forøge eller formindske deres indbyrdes vinkelafstand (målt i forhold til katodens centrum) 1.2pt



Figur 4

Den fokuseringsmekanisme, du nu har set i part A.5 vil koncentrere elektronerne i roterende strålebundter (som egre i et hjul). Figur 4 viser et enkelt sådant strålebundt, som betegnes S.

- A.6** Vis i svararket de andre roterende stråleundter. Angiv med pile deres omløbsretning, og beregn deres gennemsnitlige vinkelhastighed ω_s . 0.8pt

Antag, at det totale elektriske felt midtvejs mellem katode og anode er lig med det statiske felts gennemsnitlige værdi, og at de roterende strålebundter med tilnærmelse er radiale. Anoderadius er a og katoderadius er b som vist på figur 4.

- A.7** Find et tilnærmet udtryk for den statiske spændingsforskel V_0 som er nødvendig for at magnetronen fungerer som beskrevet. (Den værdi du finder er omtrent den minimale værdi som er nødvendig; den optimale værdi er noget højere) 1.1pt

Del B: Vekselvirkningen mellem mikrobølgestrålingen og vandmolekyler (3.4 point)

Denne del af opgaven omhandler brugen af mikrobølgestråling (udsendt fra magnetronens antenne ind til ovnkammeret) til at tilberede, dvs. opvarme et dielektrisk materiale som vand, enten rent eller saltholdigt (dette kunne være en model af fx suppe).

En elektrisk dipol er en konfiguration med to lige store, men modsatte ladninger q og $-q$ anbragt i en lille afstand d fra hinanden. Den elektriske dipolvektor peger fra den negative til den positive ladning, og størrelsen af dipolvektoren (dipolmomentet) er $p = qd$.

Et tidsafhængigt elektrisk felt $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ påtrykkes en enkelt dipol med dipolmoment $\vec{p}(t)$ med konstant størrelse $p_0 = |\vec{p}(t)|$. Vinklen mellem dipolvektoren og det elektriske felt er $\theta(t)$.

- B.1** Opskriv udtryk for både størrelsen af kraftmomentet $\tau(t)$ fra det elektriske felt på dipolen og for effekten $H_i(t)$ tilført fra det elektriske felt til dipolen. Svarene skal udtrykkes ved størrelserne p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ og deres afledede. 0.5pt

Vandmolekyler er polære, og kan derfor betragtes som dipoler. På grund af de stærke hydrogenbindinger mellem vandmolekylerne i flydende vand kan man ikke betragte vandmolekylerne som uafhængige dipoler. I stedet skal man betragte polarisationsvektoren $\vec{P}(t)$, som er dipolmoment-tætheden (dvs. det gennemsnitlige dipolmoment pr. rumfangsenhed af en samling vandmolekyler). Polarisationen $\vec{P}(t)$ er parallel med det lokalt påtrykte, varierende elektriske felt (af mikrobølgestråling), $\vec{E}(t)$, og det varierer periodisk med en amplitude, som er proportional med amplituden af det lokale varierende elektriske felt, men med en faseforskydning δ .

Det lokale varierende elektriske felt på et givet sted i vandet er givet ved $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t) \hat{x}$, hvor $\omega = 2\pi f$, hvilket giver anledning til en polarisation $\vec{P}(t) = \beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta) \hat{x}$, hvor den dimensionsløse konstant β er relateret til egenskaber ved vandet.

- B.2** Bestem et udtryk for tidsmiddelværdien af effekten $\langle H(t) \rangle$ pr. rumfangsenhed som absorberes af vandet. 0.5pt
Tidsmiddelværdien for en tidsafhængig periodisk funktion $f(t)$ over en periode T er defineret som:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

Lad os nu betragte udbredelsen af strålingen gennem vandet. Den relative dielektriske konstant for vand (ved den frekvens, som det elektromagnetiske felt har) er ϵ_r , og det tilsvarende brydningsindeks for vand er $n = \sqrt{\epsilon_r}$. Den momentane energitæthed af det elektriske felt er givet ved $\frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$. Tidsmiddelværdierne af energitætheden for det elektriske og det magnetiske felt er lige store.

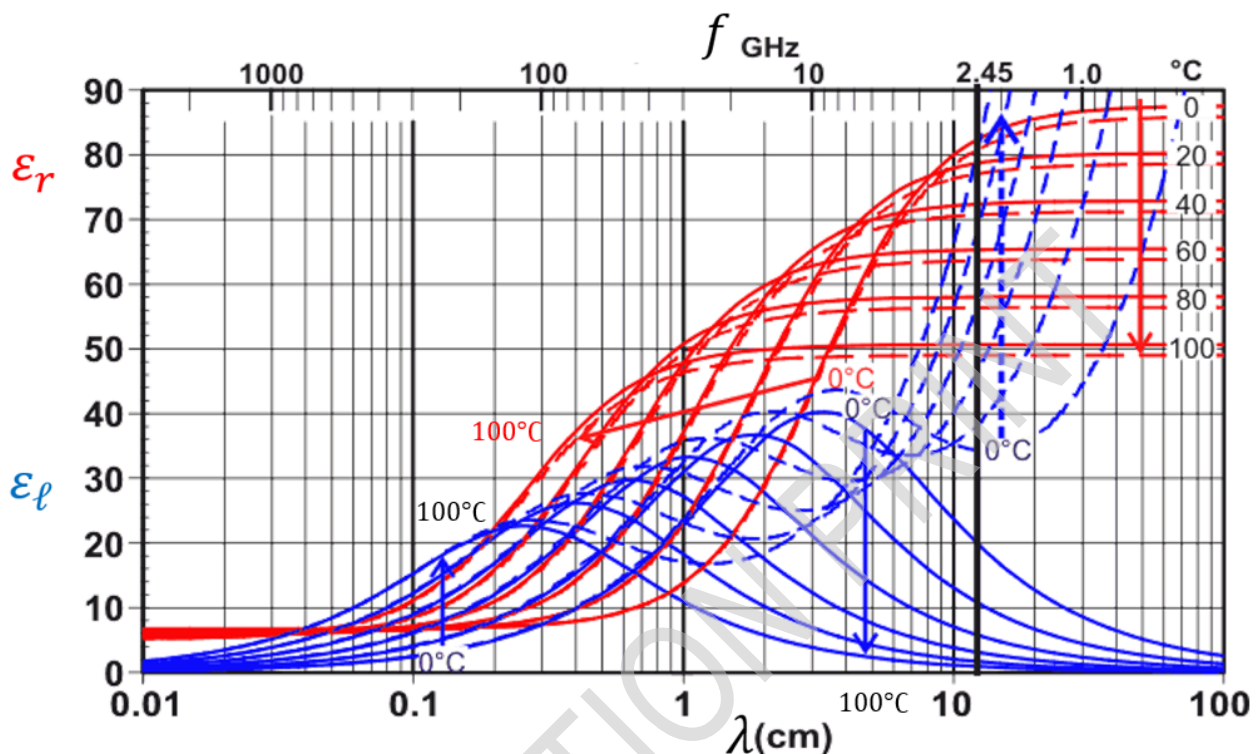
- B.3** Lad os betegne den tidsmidlede strålingsenergis intensitet med $I(z)$ (gennemsnitlig strålingseffekt pr areal). Her er z indtrængningsdybden af strålingen ind i vandet, og strålingen udbreder sig i z -retningen. Bestem et udtryk for hvordan $I(z)$ afhænger af z . Intensiteten ved vandoverfladen, $I(0)$, må gerne indgå i dit svar. 1.1pt

Faseforskydningen δ er et resultat af vekselvirkning mellem vandmolekylerne. Den afhænger af den dimensionsløse dielektriske tabskoefficient ϵ_ℓ og den relative dielektriske konstant ϵ_r (begge disse konstanter afhænger af strålingens vinkelfrekvens ω og af temperaturen) gennem relationen $\tan \delta = \epsilon_\ell / \epsilon_r$. Når δ er tilstrækkeligt lille, vil det elektriske felt ved indtrængningsdybden z inde i vandet være givet ved:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

hvor $k_0 = \omega/c$ og $c = 3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ er lysets fart i vakuum.

- B.4** Benyt approksimationen $\tan \delta \approx \sin \delta$, og bestem et udtryk for koefficienten β (som blev defineret i spørgsmål B.2) udtrykt ved de andre parametre. 0.6pt



Figur 5. Pilene indikerer variation med temperaturen fra 0° til 100°.

Figur 5 viser ϵ_l (blå) og ϵ_r (rød) for både rent vand (fuldt optrukne kurver) og en fortyndet opløsning af salt i vand (stiplede linjer) som funktioner af bølgelængde eller frekvens ved en række forskellige temperaturer. Vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ er indikeret med en fremhævet lodret linje. Herunder vil vi betragte mikrobølgestrålingen udelukkende ved netop denne frekvens.

B.5 Benyt figur 5 til at besvare nedenstående spørgsmål:

0.7pt

1. For vand ved 20°C skal du bestemme indtrængningsdybden $z_{1/2}$, ved hvilken effekten pr. rumfangsenhed er halveret i forhold til værdien ved $z = 0$.
2. Angiv på svararket om indtrængningsdybden af mikrobølgestrålingen i vandet forøges, mindskes eller forbliver den samme når temperaturen øges.
3. Angiv på svararket om indtrængningsdybden af mikrobølgestrålingen i suppen (fortyndet saltopløsning) forøges, formindskes eller forbliver den samme, når temperaturen øges.