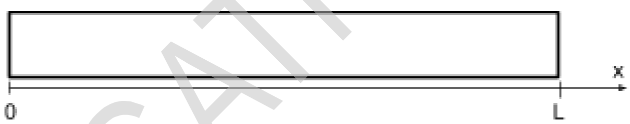
Termo-akustisk varmemaskine

En termo-akustisk varmemaskine er en maskine, som konverterer varmeenergi om til akustisk energi, specifikt lydbølger - der er en form for mekanisk arbejde. Ligesom mange andre varmemaskiner kan dens virkning vendes om, sådan at den bliver til en varmepumpe, som vil bruge lyd til at pumpe varmeenergi fra et koldt til et varmt reservoir. De høje frekvenser som maskinen virker ved reducerer varmeledning i maskinen og gør, at maskinen ikke behøver lukkede arbejdskamre. I modsætning til mange andre typer af varmemaskiner har en termo-akustisk varmemaskine ingen bevægelige dele, undtagen gassen i den.

Nyttevirkningen af termo-akustiske varmemaskiner er typisk lavere end ved andre typer af varmemaskiner, men de er fordelagtige, når det kommer til konstruktion og vedligeholdelse. Dette skaber muligheder for anvendelse indenfor bæredygtige energikilder, som sol-termiske kraftværker, og udnyttelse af spildvarme. I denne analyse vil vi fokusere på skabelsen af akustisk energi i et system, som er en termo-akustisk varmemaskine. Vi vil ignorere den videre udvinding og omdannelse af denne energi til drift af eksterne maskiner.

Del A: En lydbølge i et lukket rør (3.7 point)

Betragt et termisk-isoleret rør med længde L og tværsnitsareal S, der ligger langs x-aksen. De to ender af røret er placeret ved $x = 0$ og $x = L$. Røret er fyldt med en ideal gas og er forseglet i begge ender. Ved ligevægtstilstanden, har gassen temperaturen T_0, trykket p_0 og densiteten ρ_0. Antag, at der kan ses bort fra viskositeten. Antag yderligere, at gassens bevægelse kun er langs x-aksen og gassens egenskaber er ensartede i y- og z-retningen.



Figur 1

A.1	Ved stående lydbølger, vil et smalt udsnit af gassen oscillere i x-retningen med en vinkelfrekvens ω. Amplituden af oscillationen afhænger af hvert gasudsnits hvileposition langs x-aksen. Den longitudinale forskydning af hvert gasudsnit fra ligevægtsstillingen x er givet ved $$u(x,t) = a\sin(kx)\cos(\omega t) = u_1(x)\cos(\omega t) \quad (1)$$ hvor $a \ll L$ er en positiv konstant, $k = 2\pi/\lambda$ er bølgetallet og λ er bølgelængden. Hvad er den størst mulige bølgelængden $\lambda_{\max}$?	0.3pt

Vi vil antage gennem resten af opgavesættet, at vi har at gøre med en egensvingning $\lambda = \lambda_{\max}$.

Betragt nu, et smalt udsnit af gas i hvile mellem x og $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$). Som resultat af forskydelsesbølgen fra delopgave A.1, oscillerer gasudsnittet langs x-aksen, mens rumfanget og andre termodynamiske egenskaber varierer. Antag gennem de følgende delopgaver, at alle disse ændringer af de termodynamiske egenskaber er små i forhold til de uperturberede værdier.

A.2	Gasudsnittets rumfang $V(x,t)$ oscillerer omkring ligevægtsværdien $V_0 = S\Delta x$ og er givet ved ligningen $$V(x,t) = V_0 + V_1(x)\cos(\omega t). \quad (2)$$ Udtryk $V_1(x)$ ved brug af V_0, a, k og x.	0.5pt

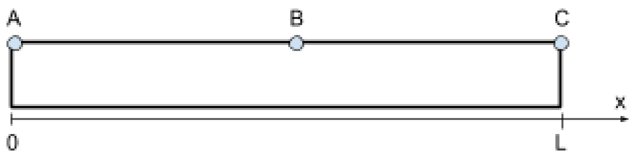
A.3	Antag at det samlede tryk, som resultat af en lydbølge, tilnærmelsesvist er givet ved ligningen $$p(x,t) = p_0 - p_1(x)\cos(\omega t). \quad (3)$$ Beregn amplituden $p_1(x)$ af en tryk-oscillation tilnærmelsesvist ved at betragte de kræfter der virker på gasudsnittet. Udtryk svaret ved positionen x, ligevægtsdensiteten ρ_0, udsvingsamplituden a, bølgetallet k og vinkelfrekvensen ω.	0.7pt

Der kan se bort fra termisk ledning af gassen, ved akustiske frekvenser. Vi vil betragte udvidelsen og sammenpresningen af gasudsnittet som udelukkende adiabatisk, hvorved den opfylder relationen $pV^\gamma = \mathrm{konst}$, hvor γ er den adiabatiske konstant.

A.4	Benyt ovenstående relation samt resultaterne fra de tidligere delopgaver til at udlede et udtryk for lydbølgers hastighed i $c = \omega/k$ i røret. Udtryk dit svar ved hjælp af P_0, ρ_0 og den adiabatiske konstant γ.	0.3pt

A.5	Ændringen i gassens temperatur kommer af den adiabatiske udvidelse og sammenpresning forårsaget af lydbølgen. Temperaturen er givet ved ligningen: $$T(x,t) = T_0 - T_1(x)\cos(\omega t). \quad (4)$$ Beregn amplituden $T_1(x)$ af temperatur-oscillationerne udtrykt ved T_0, γ, a, k og x.	0.7pt

A.6	I denne delopgave antager vi, at der kun er en svag varmeudveksling mellem røret og gassen. Det resulterer i, at den stående lydbølge forbliver næsten uændret, men at gassen kan udveksle en lille mængde varme med røret. Der kan ses bort fra opvarmningen på grund af viskositet. Beskriv for hvert af punkterne på figur 2 (A og C ved hjørnerne og B ved midpunktet) om temperaturen for punktet på røret stiger, falder eller forbliver konstant.	1.2pt

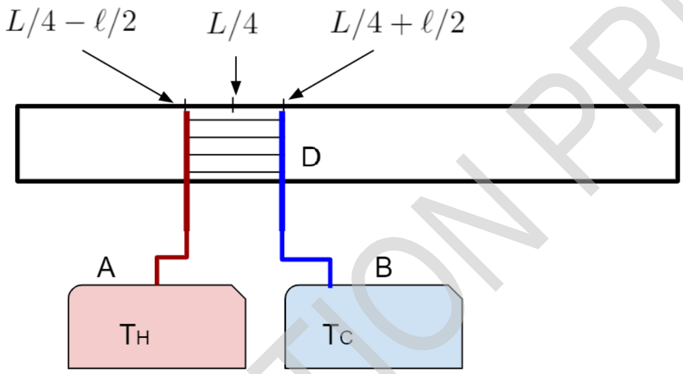


Figur 2

Del B: Forstærkning af lydbølger ved hjælp af ekstern termisk kontakt

Et gitter af tynde, stive plader er placeret inden i røret med indbyrdes mellemrum. Pladerne er placeret parallelt med rørets akse, så de ikke blokerer gassens bevægelser langs røret. Gitterets midtpunkt har positionen $x_0 = L/4$, og gitterets længde langs rørets akse er $\ell \ll L$, hvorved det udfylder rørets tværsnit. Gitterets venstre ende, som har positionen $x_H = x_0 - \ell/2$, bliver holdt ved den konstante temperatur $T_H = T_0 + \tau/2$ af et eksternt termisk reservoir. Ligeledes bliver dets højre ende, som har positionen $x_C = x_0 + \ell/2$ holdt ved den konstante temperatur $T_C = T_0 - \tau/2$.

Gitteret tillader en svag longitudinal varmestrøm med en konstant temperatur-gradient, så temperaturen er givet ved $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x - x_0}{\ell}\tau$.



Figur 3a. En skitse af opsætningen. Det varme og det kolde varmereservoir er henholdsvis angivet som (A) og (B). Gitteret er angivet som (S).

Figur 3b. Temperaturen af røret som en funktion af positionen inden i røret. De orange stiplede linjer angiver regionen hvor gitteret er placeret.

For at analysere effekten som den termiske kontakt mellem gitteret og gassen har på lydbølgerne i røret, må vi lave følgende antagelser:

- Antag som før, at alle disse ændringer af de termodynamiske egenskaber er små i forhold til de uperturberede værdier.
- Systemet udfører svingninger ved den egensvingning, der har den længst mulige bølgelængde. Den stående bølge bliver kun i meget lille grad påvirket af gitterets effekt.
- Gitteret er meget kortere end bølgelængden $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$, og kan blive placeret tilstrækkeligt langt væk fra buge og knudepunkter i udsving og i tryk, således at udsvinget $u(x,t) \approx u(x_0,t)$ og trykket $p(x,t) \approx p(x_0,t)$ kan antages at være konstant langs hele længden af gitteret.
- Vi kan se bort fra alle rand-effekter, som kan forekomme når gassen bevæger sig ind og ud af gitteret.
- Temperaturforskellen mellem enderne af gitteret, dvs. mellem det varme og det kolde reservoir, er lille sammenlignet med den absolutte temperatur af gassen: $\tau \ll T_0$.
- Varmeledningen i gassen, gennem gitteret og langs røret er alle ubetydelige. Det eneste betydelige bidrag til transport af varmeenergi i systemet kommer fra bevægelsen af gassen og overførslen af varmeenergi mellem gitteret og gassen.

B.1 Betragt et specifikt gasudsnit ved gitteret, som oprindeligt befinder sig ved $x_0 = L/4$. Når gasudsnittet bevæger sig i gitteret vil den lokale temperatur som gasudsnittet føler fra den tilstødende del af gitteret ændre sig og være beskrevet ved ligningen: **0.4pt**

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}}\cos(\omega t). \tag{5}$$

Udtryk T_{st} ved hjælp af a, τ og ℓ.

B.2 Over hvilken kritisk temperaturforskel τ_{cr} mellem enderne af gitteret vil gassen transportere varmeenergi fra det varme reservoir til det kolde reservoir? Udtryk τ_{cr} ved hjælp af T_0, γ, k og ℓ. **1.0pt**

B.3 Udled et tilnærmet generelt udtryk for varmeenergistrømmen $\frac{dQ}{dt}$ ind i et gasudsnit som en lineær funktion af den tidsafledede af volumen og den tidsafledede af trykket i gasudsnittet. Udtryk dit svar ved hjælp af den tidsafledede af volumen $\frac{dV}{dt}$, den tidsafledede af trykket $\frac{dp}{dt}$, ligevægtsværdierne for gasudsnittets tryk og volumen p_0 ,V_0 og den adiabatiske konstant γ. (Du kan bruge udtrykket for den molære varmekapacitet ved konstant volumen $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$, hvor R er gaskonstanten.) **0.8pt**

Den begrænsede varmeenergistrøm mellem gasudsnittet og gitteret skaber en faseforskel mellem trykoscillationen og volumen-oscillationen i gasudsnittet. Vi skal se hvordan dette genererer mekanisk arbejde.

Antag at varmeenergistrømmen fra gitteret til gasudsnittet er proportionalt med temperaturforskellen mellem gasudsnittet og den tilstødende del af gitteret, og lad varmeenergistrømmen være tilnærmelsesvist givet ved $\frac{dQ}{dt} = \beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1)\cos(\omega t)$. Her er T_1 temperaturoscillationsamplituden for gasudsnittet og T_{st} er temperaturoscillationsamplituden for den tilstødende del af gitteret med hensyn til gasudsnittet fra henholdsvis delopgave A.5 og B.1, og $\beta > 0$ er en konstant. Antag at ændringen i gassens temperatur på grund af denne varmeenergistrøm er ubetydelig med hensyn til oscillationerne af T_1 og T_{st} ved maskinens arbejdsfrekvens.

B.4 For at udregne mekaniske arbejde vil vi betragte en ændring i volumen af det bevægede gasudsnit forårsaget af den termiske kontakt med gitteret. Trykket og volumen af gasudsnittet vil under gitterets indflydelse være givet ved: **1.9pt**

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \tag{6}$$

Givet at vi kender p_a og p_b, find koefficienterne $V_a$og V_b. Udtryk dit svar ved hjælp af p_a, p_b, p_0, V_0, γ, τ, τ_{cr}, β, ω, a og ℓ.

B.5 Udled et tilnærmet udtryk for det akustiske, mekaniske arbejde per volumen w udført af gassen over en oscillationsperiode. Integrér over volumen af gitteret for at finde det totale mekaniske arbejde W_{tot} udført af gassen over en periode. Udtryk W_{tot} ved hjælp af γ, τ, τ_{cr}, β, ω, a, k og S. **0.8pt**

B.6	Udled et tilnærmet udtryk for varmeenergien Q_{tot} der bliver transporteret fra venstre side af planet $x = x_0$ til dets højre side over en periode. Udtryk dit svar ved hjælp af τ, τ_{cr}, β, ω, a, S, ℓ. (Hint: Du kan bruge formlen $j = Q\frac{du}{dt}$ for varmeenergistrøm som følge af konvektion.)	0.8pt

B.7	Find nyttevirkningen η af den termo-akustiske varmemaskine. Nyttevirkningen er defineret som forholdet mellem det genererede akustiske arbejde og varmeenergien, som bliver taget fra reservoiret. Udtryk dit svar ved hjælp af temperaturforskellen τ mellem det varme og kolde reservoir, den kritiske temperaturforskel τ_{cr} og nyttevirkningen af en Carnot maskine $\eta_c = 1 - T_C/T_H$.	0.6pt