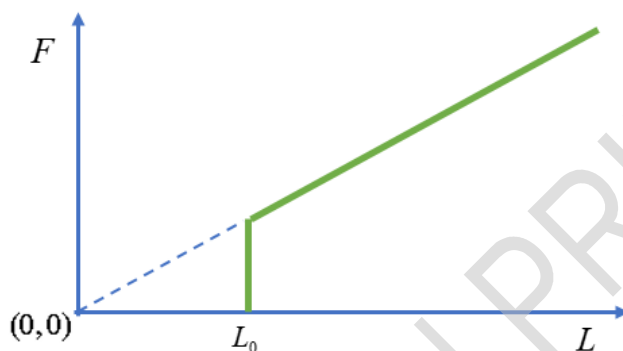


## Nul-længde fjedre og slinkyfjedre

En nul-længde fjeder (NLF) er en fjeder, hvor kraften er proportional med fjederens længde  $F = kL$  for  $L > L_0$ , hvor  $L_0$  er den mindste længde af fjederen (fjederens ustrakte længde). På Fig. 1 er vist sammenhængen mellem kraften  $F$  og fjederlængden  $L$  for en NFL, hvor hældningen af linjen er fjederkonstanten  $k$ .



Figur 1: Sammenhængen mellem kraften  $F$  og fjederlængden  $L$

En nul-længde fjeder er nyttig i seismografi og tillader meget nøjagtige målinger af variationer i tyngdeaccelerationen  $g$ . I denne opgave betragtes en homogen NLF, på hvilken tyngdekraften  $Mg$  er større end  $kL_0$ . Vi definerer en tilhørende dimensionsløs størrelse  $\alpha = kL_0/Mg < 1$  til at beskrive den relative blødhed af fjederen. Man kan tænke på det stykke legetøj, der er kendt som en "slinkyfjeder", som et eksempel på en NFL.

### Del A: Statik (3.0 point)

**A.1** Betragt et udsnit af længde  $\Delta\ell$  af den ustrakte NLF som strækkes af kraften  $F$ , og der ikke er nogen tyngdekraft. Hvad er længden  $\Delta y$  af dette udsnit som funktion af  $F$ ,  $\Delta\ell$  og fjederens parametre? 0.5pt

**A.2** Beregn for et udsnit af fjederen med længden  $\Delta\ell$  arbejdet  $\Delta W$  der skal udføres for at strække udsnittet fra den oprindelige længde  $\Delta\ell$  til en ny længde  $\Delta y$ . 0.5pt

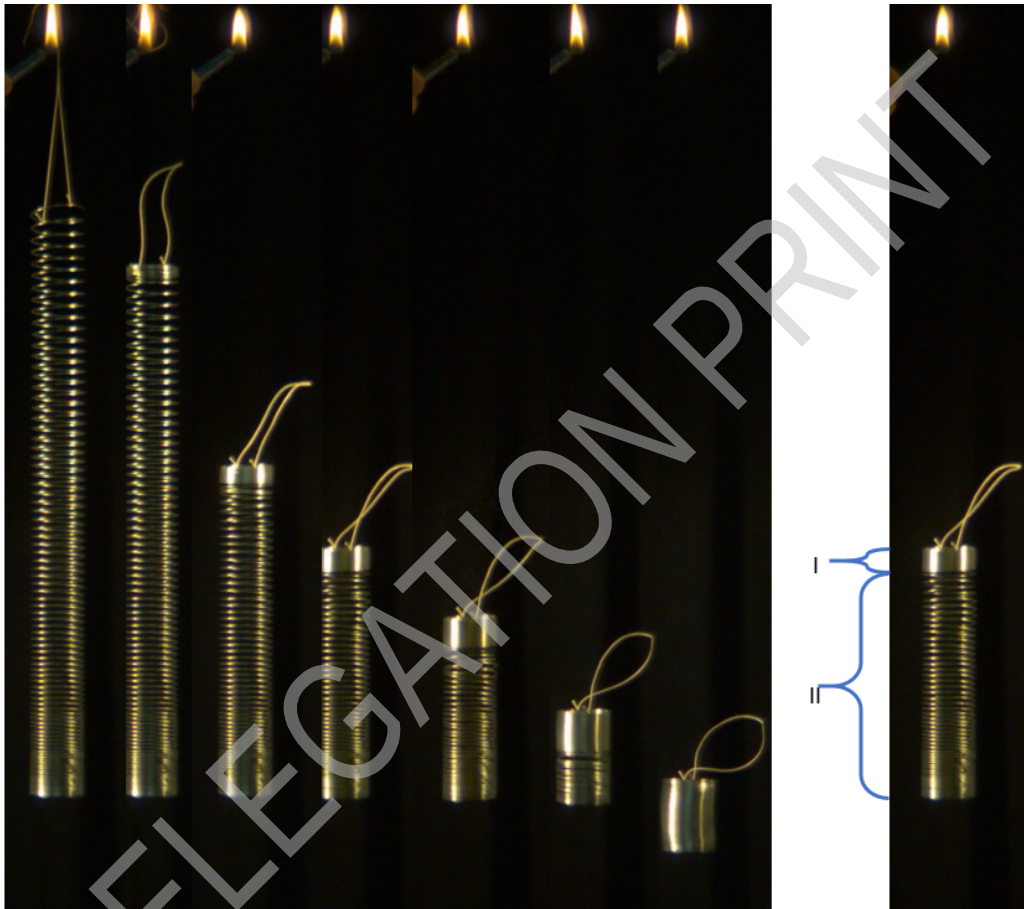
I resten af dette spørgsmål vil vi markere et givet punkt på fjederen ved hjælp af punktets afstand  $0 \leq \ell \leq L_0$  fra bunden af fjederen, når den er ustrakt. Bemærk, at for hvert punkt på fjederen forbliver  $\ell$  uændret, når fjederen strækkes.

**A.3** Antag nu, at fjederen er ophængt i toppen, så den strækkes under sin egen vægt i tyngdefeltet. Hvad er den samlede længde  $H$  af den ophængte fjeder, når den er i ligevægt? Angiv dit svar udtrykt ved størrelserne  $L_0$  og  $\alpha$ . 2.0pt

### Del B: Dynamik (5.5 point)

Eksperimenter viser, at når fjederen er ophængt i hvile og derefter slippes, vil den gradvist trække sig sammen fra toppen, mens den nederste del af fjederen forbliver i hvile (se Fig. 2). Som tiden går, vil den sammentrækkende del af fjederen bevæge sig som en samlet klump, der hele tiden følger ekstra fjeder-

vindinger til klumpen, alt imens den stationære del bliver kortere og kortere. Ethvert punkt på fjederen begynder først at flytte sig, når den bevægelige del af fjederen når frem til det. Bunden af fjederen begynder således først at bevæge sig, når fjederen er helt klappet sammen og har nået sin ustrakte længde  $L_0$ . Derefter vil den sammenklappede fjeder fortsætte sit fald som et stift legeme påvirket af tyngdekraften.



Figur 2: Venstre: En række billeder taget under det frie fald af slinkyfjederen. Højre: Den del af fjederen, der bevæger sig (I) og den stationære del af fjederen (II) under det frie fald af fjederen.

I den resterende del af opgaven skal du svare med udgangspunkt i den ovenfor beskrevne model. Du skal se bort fra luftmodstand, men du må ikke se bort fra betydningen af  $L_0$ .

- B.1** Beregn den tid  $t_c$  det tager fra det øjeblik hvor fjederen slippes fra hvile, til den er fuldt sammenklappet til sin minimale længde  $L_0$ . Udtryk dit svar ved størrelserne  $L_0$ ,  $g$  og  $\alpha$ . 2.5pt  
 Beregn talværdien for  $t_c$  for en fjeder med  $k = 1.02 \text{ N/m}$ ,  $L_0 = 0.055 \text{ m}$  og  $M = 0.201 \text{ kg}$ , idet  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ .



- B.2** I dette spørgsmål benyttes  $\ell$  til at betegne koordinaten for det punkt på fjederen, der adskiller de to dele I (den bevægede del af fjederen) og II (den stationære del af fjederen), se Fig. 2. På et givet tidspunkt, mens den stationære del stadig findes, er den stationære dels masse givet ved  $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0} M$ , og hele den bevægede del har samme momentane hastighed  $v_I(\ell)$ .  
Vis, at til dette tidspunkt (så længe der stadig er en stationær del) vil den bevægede dels hastighed være givet ved et udtryk af formen  $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$ . Bestem konstanterne  $A$  og  $B$  udtrykt ved størrelserne  $L_0$ ,  $g$  og  $\alpha$  2.5pt

- B.3** Med udgangspunkt i dit svar fra B.2 skal du finde minimumsfarten  $v_{\min}$  af den bevægede del af fjederen under faldet (fra fjederen er sluppet til lige før den rammer jorden). Udtryk dit svar ved størrelserne  $L_0$ ,  $\alpha$ ,  $A$  og  $B$ . 0.5pt

### Del C: Energibetragtninger (1.5 point)

- C.1** Beregn den mængde mekanisk energi  $Q$  som er gået tabt i form af varme fra det øjeblik hvor fjederen er sluppet til lige før den rammer jorden. Udtryk dit svar ved størrelserne  $L_0$ ,  $M$ ,  $g$  og  $\alpha$ . 1.5pt