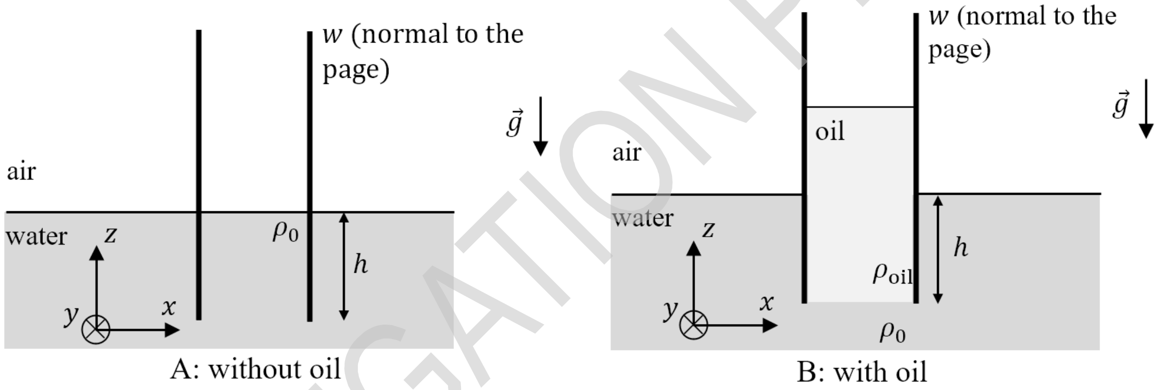
Geofysik (10 point)

Denne opgave består af to uafhængige delopgaver relateret til en planets indre. Du kan se bort fra effekter som er konsekvenser af planetens overfladekrumning. Du får måske brug for formlen

$$(1+x)^{\varepsilon} \approx 1+\varepsilon x, \text{ når } |x| \ll 1. \tag{1}$$

Del A. Midtoceaniske højderygge (5.0 points)

En stor beholder fyldt med vand befinder sig i et uniformt gravitationsfelt hvor tyngdeaccelerationen er g. To parallelle plader med samme bredde som beholderen bliver vertikalt nedsænket i beholderen sådan at pladernes vertikale sider danner tæt og uigennemtrængelig kontakt med beholderens vægge. Bunden af pladerne befinder sig i dybden h under vandoverfladen (Fig. 1). Pladernes bredde er w langs $y-$aksen, og vands densitet er ρ_0.



Figur 1. Parallelle plader i vand, med og uden olie.

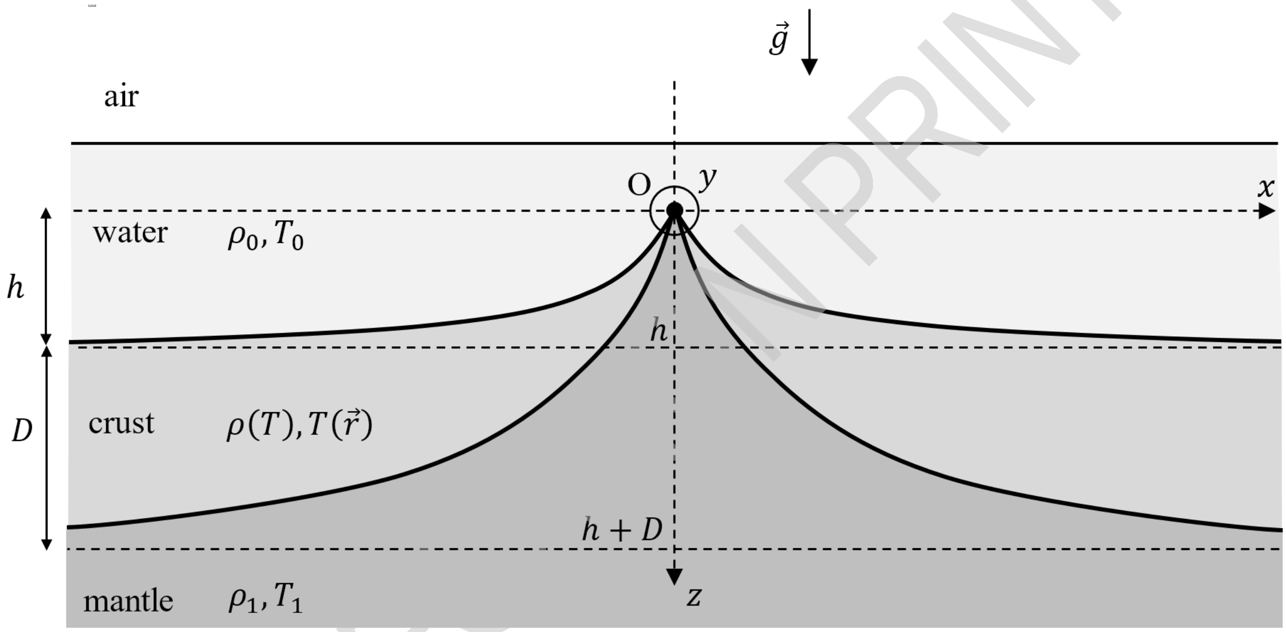
Olie med densitet ρ_{oil} ($\rho_{oil} < \rho_0$) bliver hældt ned i mellemrummet mellem pladerne indtil bunden af olielaget når ned til bunden af pladerne. Antag at pladerne er høje nok til at olien ikke vil flyde over dem. Overfladespænding og blanding mellem væskerne kan blive ignoreret.

A.1	Hvad er x-komponenten F_x af den totale kraft som den højre plade bliver påvirket af (angiv størrelse og retning)?	0.8pt

Fig. 2 viser et tværsnit af en midtoceanisk højderyg. Tværsnittet består af overliggende lag af kappe, skorpe og havvand. Kappen er en stenmasse som er flydende målt på geologiske tidsskalaer og som derfor vil blive beskrevet som en væske i denne opgave. Tykkelsen af skorpen er meget mindre end den karakteriske længdeskala i $x-$retningen af højderyggen, og skorpen vil derfor opføre sig som en frit bøjelig plade. Sådan et system kan med stor præcision beskrives af en to-dimensional model, hvor ingen variation forekommer langs $y-$aksen, hvilken er angivet vinkelret til tværsnittets plan i Fig. 2. Antag at højderyggens længde L langs $y-$aksen er meget større end alle andre længder der vil blive introduceret i opgaven.

Det antages at skorpens tykkelse er lig nul ved midten af højderyggen. Skorpens tykkelse vokser med den horisontale afstand x fra højderyggens midte, og tykkelsen nærmer en konstant værdi D når $x \longrightarrow \infty$. Højderyggens top O, som defineres til at være vores koordinatsystems begyndelsespunkt (se Fig. 2), rejser sig til en vertikal højde af h over den omkringliggende havbund, hvilken er tilsvarende flad langt væk fra højderyggens midte. Vandets densitet ρ_0 og temperatur T_0 kan antages til at være konstant overalt til alle tider. Det samme kan antages for kappens densitet ρ_1 og temperatur T_1. Skorpens temperatur T er også konstant i tid men kan afhænge af position.

Det vides at materialet som skorpen består af udvider sig linært med dets temperatur T. Det kan være praktisk at anvende en omskaleret version af den termiske udvidelses-koefficient, siden vi har antaget at vandet og kappen har konstant temperatur. Således kan vi skrive $l(T) = l_1\left[1 - k_l(T_1 - T)/(T_1 - T_0)\right]$, hvor l er længden af et stykke af skorpens materiale, l_1 er stykkets længde ved temperatur T_1, og k_l er en omskaleret termisk udvidelses-koefficient, som antages konstant.



Figur 2. Midtoceanisk højderyg. Bemærk at $z-$aksen peger nedad.

A.2 Her kan du antage at skorpen er isotropisk. Find skorpens densitet ρ som en funktion af dens temperatur T. Antag at $|k_l| \ll 1$. Angiv dit svar på den tilnærmede form **0.6pt**

$$\rho(T) \approx \rho_1\left[1 + k\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}\right], \tag{2}$$

hvor du kan se bort fra led proportionale med k_l^2 og højere-ordens-led. Identificer konstanten k.

Det vides at $k > 0$. Skorpens termiske konduktivitet κ kan antages som værende konstant. Som konsekvens af dette vil skorpens temperatur langt væk fra midten af højderyggen afhænge linært af dybden.

A.3 Antag at vandet og kappen opfører sig som usammentrykkelige væsker i hydrostatisk ligevægt. Udtryk værdien af skorpens tykkelse D langt væk fra midten af højderyggen ved hjælp af $h,\ \rho_0, \rho_1,$og k. Du kan se bort fra al bevægelse i materialerne. **1.1pt**

A.4	Find, til ledende orden af k, den totale horisontale kraft F som den højre halvdel ($x > 0$) af skorpen bliver påvirket af, udtrykt ved hjælp af ρ_0, ρ_1, h, L, k og g.	1.6pt

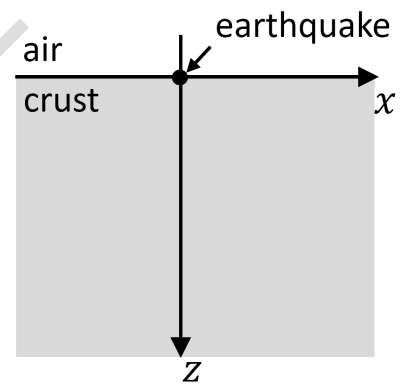
Antag nu at skorpen er termisk isoleret fra resten af Jorden. Som konsekvens af varmeledning vil temperaturen af den øvre og nedre overflade af skorpen komme tættere og tættere på hinanden indtil skorpen opnår termisk ligevægt. Den specifikke varmekapacitet af skorpen er c, som kan antages til at være konstant.

A.5	Ved hjælp af dimensionsanalyse eller størrelsesorden-analyse, skal du estimere den karakteristiske tidsskala τ i løbet af hvilken temperaturforskellen mellem den øvre og nedre overflade af skorpen langt væk fra midten af højderyggen vil nærme sig nul. Du kan antage at τ ikke afhænger af nogen af skorpens overfladers start-temperaturer.	0.9pt

Del B. Seismiske bølger i et lagdelt medium (5.0 points)

Et kortvarigt jordskælv forekommer ved overfladen af en planet. De seismiske bølger kan antages at blive udsendt fra en linje der er placeret ved $x = z = 0$, hvor x er den horisontale koordinat og z er dybden under overfladen (Fig. 3). Linjen som de seismiske bølger udspringer fra kan antages til at være meget længere end alle andre længer der forekommer i opgaven.

Som konsekvens af jordskælvet vil et uniformt flow af såkaldte longitudinale P-bølger blive udsendt i alle retninger i $xz-$planen der har en positiv $z-$komponent. Siden beskrivelser af bølger i faste legemer generelt set er komplicerede, vil vi se bort fra alle andre bølgetyper, der kunne blive produceret af jordskælvet. Planetens skorpe er lagdelt sådan at en P-bølges fart v vil afhænge af dybden z på følgende måde $v = v_0(1 + z/z_0)$, hvor v_0 er farten ved overfladen, og z_0 er en kendt positiv konstant.



Figur 3. Koordinatsystemet der bliver brugt i del B.

B.1	Betragt en enkelt stråle der udsendes under jordskælvet, hvis begyndelsesretning danner en vinkel $0 < \theta_0 < \pi/2$ med z-aksen og bevæger sig i xz-planen. Ved hvilken horisontal koordinat $x_1(\theta_0) \neq 0$ vil strålen ramme overfladen af planeten? Det er et kendt resultat at en sådan stråles bane er en cirkelbue. Angiv dit svar på formen $x_1(\theta_0) = A\cot(b\theta_0)$, hvor A og b er konstanter som du skal finde.	1.5pt

Hvis du ikke var i stand at finde A og b i den forrige opgave, kan du fra nu af anvende resultatet $x_1(\theta_0) =$

$A\,\cot(b\theta_0)$. Antag at den totale energi udløst per længdeenhed fra jordskælvslinjen i form af P-bølger er E. Antag at bølgerne bliver fuldkomment absorberet, når de rammer overfladen af planeten nedenfra.

B.2	Udled et udtryk $\varepsilon(x)$ for hvordan energien der absorberes af planetens overflade per overfladeareal afhænger af afstanden til jordskælvslinjen x. Skitser en graf for $\varepsilon(x)$.	1.5pt

Antag fra nu af at bølgerne i stedet for bliver fuldstændigt reflekteret når de rammer overfladen. Forestil dig en maskine placeret ved $z = x = 0$ der har den samme geometri som jordskælvslinjen der blev betragtet tidligere. Maskinen er i stand til at udsende P-bølger i en vilkårligt valgt vinkel-interval. Vi indstiller maskinen sådan at den udsender signaler over et snævert interval af vinkler. Vi indstiller maskinen sådan at målt fra z-aksen vil vinklen tilhøre intervallet $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$, hvor $0 < \theta_0 < \pi/2$, $\delta\theta_0 \ll 1$ og $\delta\theta_0 \ll \theta_0$.

B.3	Find afstanden x_{max} ud til det fjerneste punkt som ikke bliver ramt af et signal? Udtryk dit svar ved hjælp af $\theta_0, \delta\theta_0$ og andre konstanter specificeret ovenfor.	2.0pt