Elektrostatisk linse (10 point)

Vi betragter en metalring med radius R, som har en homogent fordelt elektrisk ladning q. Ringen er en hul torus (som en "hulahop-ring") med tykkelse $2a \ll R$. Tykkelsen kan man se bort fra i opgavedelene A, B, C, og E. Ringen ligger i xy-planen, mens z-aksen er vinkelret på som vist i figur 1. I opgavedelene A og B kan du få brug for tilnærmelsesformlen (Taylorudvikling)

$$(1+x)^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon - 1)x^2, \text{ when } |x| \ll 1.$$

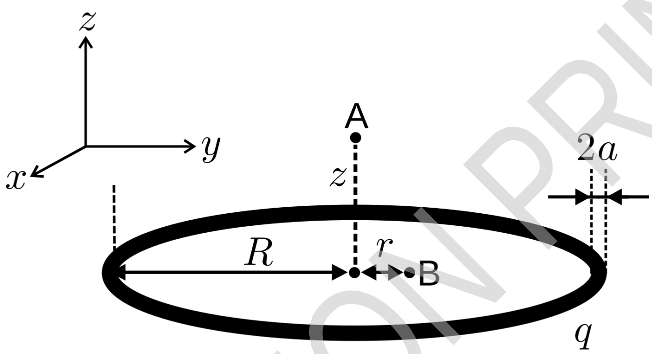


Figure 1. En ladet ring med radius *R*.

Del A. Elektrostatisk potentiale langs ringens akse (1 point)

A.1	Beregn det elektrostatiske potentiale $\Phi(z)$ langs ringens akse i afstanden z fra centrum (punktet A på figur 1).	0.3pt

A.2	Beregn med tilnærmelse for $z \ll R$ det elektrostatiske potentiale $\Phi(z)$ med den laveste potens (større end nul) af z.	0.4pt

A.3	En elektron (med masse m og ladning $-e$) flyttes nu til punkt A (figur 1), $z \ll R$. Hvor stor er kraften som påvirker elektronen? Afgør ud fra udtrykket for kraften hvilket fortegn q skal have, så det vil give anledning til svingninger. (Ladningsfordelingen i ringen påvirkrs ikke)	0.2pt

A.4	Hvad er vinkelfrekvensen (den cykliske frekvens) ω for den harmoniske svingning?	0.1pt

Del B. Elektrostatisk potentiale i ringens plan (1.7 points)

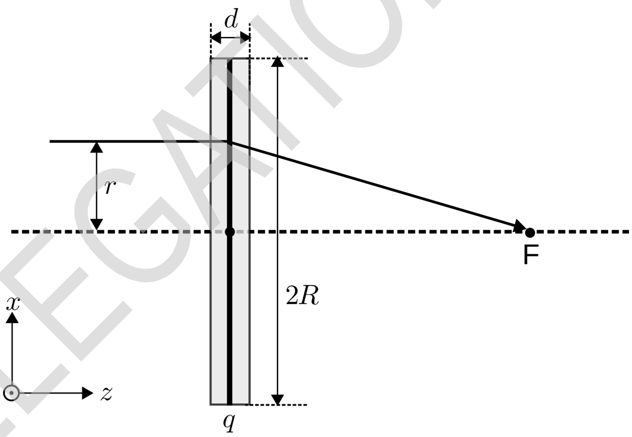
I denne del skal du undersøge potentialet $\Phi(r)$ i ringens plan ($z = 0$) for $r \ll R$ (punkt B i figur 1) Afhængigheden af *r* tilnærmes ved Taylorudviklingen $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$.

B.1	Find et udtryk for β. Du kan eventuelt få brug for Taylorudviklingen givet ovenfor.	1.5pt

B.2	En elektron placeres i punktet B (figur 1, $r \ll R$). Hvilken kraft påvirker elektronen? Bestem ud fra udtrykket for kraften hvilket fortegn q skal have så elektronen ville kunne udføre en harmonisk svingning (som igen ikke vil påvirker ladningsfordelingen i ringen).	0.2pt

Del C. Brændvidde af en idealiseret elektrostatisk linse: Øjeblikkelig op- og afladning (2.3 point)

Der ønskes en opstilling, der kan fokusere et strålebundt af elektroner — en elektrostatisk linse. Vi ser på følgende: Ringen er vinkelret på z-aksen som vist på figur 2. Vi har en kilde, som vi kan få til at udsende tætte pakker af ikke-relativistiske elektroner med energi $E = mv^2/2$, som forlader kilden på nøje kontrollerede tidspunkter. Systemet programmeres så ringen er neutral i langt størstedelen af tiden, men lades øjeblikkeligt op med ladningen q, når afstanden fra elektronerne i pakken til ringens plan er mindre end $d/2$ $(d \ll R)$, på figuren vist som det grå område, kaldet ”det aktive område”. I del C antages det, at opladning og afladning af ringen er øjeblikkelig. Ligeledes antages at magnetiske felter er uden betydning. Desuden antages elektronernes hastigheder i z -retningen at være konstante. Elektronerne som bevæger sig, påvirker ikke ladningsfordelingen i ringen.



Figur 2. En model af en elektrostatisk linse.

C.1	Bestem brændvidden f for denne linse. Antag at $f \gg d$. Angiv svaret udtrykt ved konstanten β fra spørgsmål B.1 samt andre kendte størrelser. Antag at elektronpakken bevæger sig parallelt med z-aksen og med den maksimale afstand $r \ll R$ fra aksen. Fortegnet for q skal være sådan at linsen faktisk fokuserer.	1.3pt

Selve kilden der udsender elektronpakker er placeret på z-aksen i afstanden $b > f$ fra ringens centrum. Antag nu, at elektronernes hastigheder ikke længere er parallelle med z-aksen, men er udsendt under meget små vinkler $\gamma \ll 1$ rad i forhold til z-aksen. Elektronerne vil nu fokusere i et punkt på z-aksen på den anden side af ringen i afstanden c fra centrum af ringen

C.2	Find c . Dit svar skal udtrykkes ved konstanten β fra B.1 og andre kendte størrelser.	0.8pt

C.3	Undersøg om den sædvanlige ligning for en tynd optisk linse $$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{f}$$ også gælder for en tynd elektrostatisk linse. Udregn eksplicit $1/b+1/c$		0.2pt

Del D. Ringen som kapacitor (3 point)

Modellen for linsen er idealiseret, idet vi har antaget at ringen oplades og aflades øjeblikkeligt. I virkeligheden er opladningen ikke øjeblikkelig, da ringen er en kapacitor med kapacitansen C. I denne del skal vi undersøge egenskaberne ved denne kapacitor. Du kan få brug for følgende integraler:

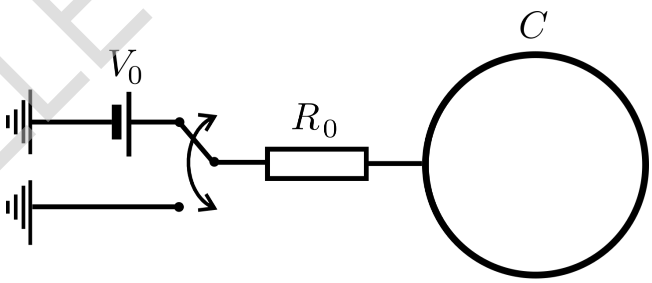
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = -\ln\left|\frac{\cos x + 1}{\sin x}\right| + \mathrm{const}$$

og

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + \mathrm{const}.$$

D.1	Beregn kapacitansen C af ringen. Antag ringens tykkelse er $2a$, og husk at $a \ll R$	2.0pt

Når udsendte elektroner når frem til "det aktive område", tilsluttes ringen en spændingskilde V_0 (Figur 3). Når elektronerne har passeret "det aktive område", afbrydes forbindelsen, så ringen igen er jordforbundet. I kontakten er en resistor R_0, og man kan se bort fra resistans i ringen.



Figur 3. Opladning af den elektrostatiske linse.

D.2	Bestem ringens ladning som funktion af tiden $q(t)$, og skitser groft denne tidsafhængighed. Antag at $t=0$ svarer til at elektronerne netop er nået frem til ringens plan. Hvad er ladningen på ringen q_0, når ladningen er numerisk maksimal? Brug bare at ringens kapacitans er C, dvs du behøver ikke bruge udtrykket fra D.1. *Bemærk:* Den tegnede polaritet i figur 3 er ikke nødvendigvis korrekt. Du skal selv vælge den polaritet, som giver en fokusering.	1.0pt

Del E. Brændvidde for en realistisk linse med ikke-øjeblikkelig op- og afladning (2 point)

Nu betragter vi en mere realistisk linse. Igen vil vi se bort fra ringens tykkelse $2a$ og antage at elektronerne bevæger sig parallelt med z-aksen frem til "det aktive område", men opladningen af ringen foregår ikke længere øjeblikkeligt

E.1	Find brændvidden f af linsen. Antag at $f/v \gg R_0C$, men også at d/v og R_0C er af samme størrelsesorden. Dit svar skal udtrykkes ved konstanten β fra del B samt andre kendte størrelser.	1.7pt

E.2	Du vil nu kunne se, at udtrykket for f ligner det, som er fundet i del C, hvor man blot har udskiftet værdien af q med en anden størrelse q_{eff}. Find et udtryk for q_{eff} udtrykt ved de givne størrelser.	0.3pt