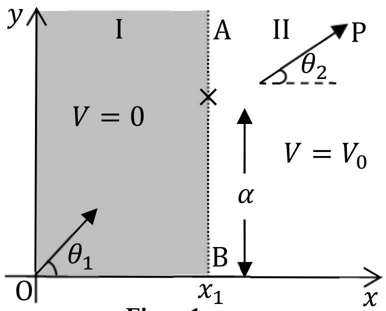
**Ekstremum-princippet** **(Samlet antal point: 10)**

## A Ekstremum-princippet i mekanik

Betragt et horisontalt gnidningsfrit $xy$-plan som vist i Fig. 1. Planet er inddelt i to områder, I og II, af linjen AB bestemt af $x = x_1$. Den potentielle energi for en partikel med masse $m$ er givet ved $V = 0$ i område I og $V = V_0$ i område II. Partiklen skydes afsted fra origo O med farten $v_1$ langs en linje, der danner en vinkel $\theta_1$ med $x$-aksen. I område II bevæger den sig med farten $v_2$ og langs en linje, der danner vinklen $\theta_2$ med $x$-aksen og går gennem punktet P. Se bort fra tyngde-kraften og relativistiske effekter i hele opgave T-2.



**Figur 1**

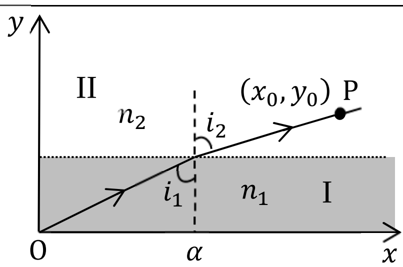
| | | |
|---|---|---|
| A1 | Bestem $v_2$ udtrykt ved $m$, $v_1$ og $V_0$. | **0.2** |
| A2 | Bestem $v_2$ udtrykt ved $v_1, \theta_1$ og $\theta_2$. | **0.3** |

Vi definerer nu en størrelse kaldet virkningen $A = m \int v(s)\, \mathrm{d}s$, hvor $\mathrm{d}s$ er det infinitesimale længdestykke langs banen for en partikel med masse $m$, der bevæger sig med hastigheden $v(s)$. Integralet skal udføres langs partiklens bane. Eksempelvis er virkningen for en partikel, der bevæger sig en hel omgang i en cirkulær bane med den konstante fart $v$, givet ved $A = mv2\pi R$. For en partikel med den konstante energi $E$ kan det vises, at ud af alle de mulige baner mellem to faste punkter, er den faktiske bane den, for hvilken $A$, som defineret ovenfor, antager et ekstremum. Dette princip er historisk kendt som ekstremum-princippet, på engelsk ”the Principle of Least Action” (PLA).

| | | |
|---|---|---|
| A3 | PLA har den konsekvens, at banen for en partikel, der bevæger sig med konstant potentiel energi mellem to faste punkter, er en ret linje. Koordinaterne for de to faste punkter O og P i Fig. 1 er henholdsvis (0,0) og $(x_0, y_0)$, og grænsepunktet, hvor partiklen overgår fra område I til område II, har koordinaterne $(x_1, \alpha)$. Bemærk, at $x_1$ er fast, og at virkningen $A$ kun afhænger af koordinaten $\alpha$. Angiv udtrykket for virkningen $A(\alpha)$. Brug derefter PLA til at finde sammenhængen mellem $v_1/v_2$ og ovennævnte koordinater. | **1.0** |

## B Ekstremum-princippet i optik

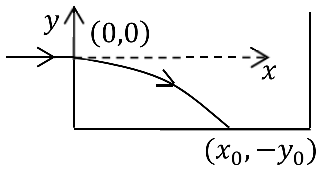
En lysstråle bevæger sig fra medium I til medium II med brydnings-indekser på henholdsvis $n_1$ og $n_2$. De to medier er adskilt af en linje parallel med $x$-aksen. I medium I danner lysstrålen vinkelen $i_1$ med $y$-aksen I og i medium II vinklen $i_2$ (se Fig. 2). For at finde lysstrålens bane, benytter vi et andet ekstremum-princip kendt som Fermats ”minimal-tids princip”.



**Figur 2**

| | | |
|---|---|---|
| B1 | Fermats princip siger, at mellem to faste punkter, vil en lysstråle bevæge sig langs den bane, hvor rejsetiden mellem punkterne er et ekstremum. Udled relationen mellem $\sin i_1$ og $\sin i_2$ ved brug af dette princip. | **0.5** |

I Fig. 3 er vist en skitse af den bane, en laserstråle følger, når den falder horisontalt ind i et kar med en sukkeropløsning, i hvilken koncentration af sukkeret aftager med højden. Dette betyder, at opløsningens bryd-ningsindeks $n(y)$ også aftager med højden $y$.

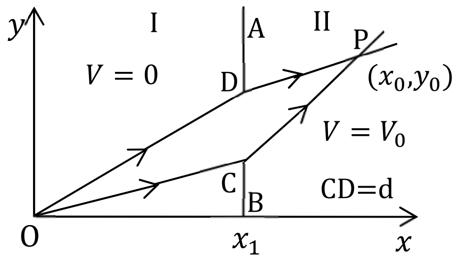


**Figur 3: Kar med sukkeropløsning.**

| | | |
|---|---|---|
| B2 | Antag, at brydningsindekset $n(y)$ udelukkende afhænger af $y$. Brug ligningen fundet i B1 til at udlede et udtryk for hældningen $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ af strålens bane, udtrykt ved brydningsindekserne $n_0 = n(0)$ og $n(y)$. | **1.5** |
| B3 | Laserstrålen sendes fra origo (0,0) horisontalt ind i sukkeropløsningen i højden $y_0$ over karets bund, som vist i Fig. 3. Lad $n(y) = n_0 - ky$ hvor $n_0$ og $k$ er positive konstanter. Find strålens bane, $x$ som funktion af $y$ og tilhørende størrelser. Du kan benytte at $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{konst.}$ eller $\int \sec\theta\, \mathrm{d}\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + \text{konst.}$, hvor $\sec\theta = 1/\cos\theta$. | **1.2** |
| B4 | Find værdien af $x_0$, det punkt hvor strålen rammer karets bund. Benyt værdierne $y_0 = 10.0\ \text{cm}$, $n_0 = 1.50$ og $k = 0.050\ \text{cm}^{-1}$. | **0.8** |

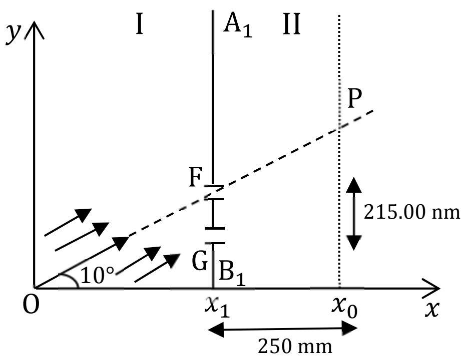
**C Ekstremums-princippet og stoffets bølgenatur**

Vi skal nu undersøge sammenhængen mellem PLA og bølgenaturen for en partikel i bevægelse ved brug af dens de Broglie bølge. Vi betragter derfor en partikel, som bevæger sig fra punktet O til punktet P, og tillader, at den kan benytte alle mulige baner mellem de to punkter. Vi søger en bane, som er betinget af konstruktiv interferens mellem de nærliggende baners de Broglie bølger.

| | | |
|---|---|---|
| C1 | En partikel med en given de Broglie bølgelængde bevæger sig den infinitesimale afstand $\Delta s$, hvilket medfører en ændring $\Delta\varphi$ i bølgens fase. Udtryk denne faseændring ved Planck-konstanten og ændringen $\Delta A$ i virkningen. | **0.6** |
| C2 | Betragt igen situationen fra Del A, hvor partiklen bevæger sig fra O til P, men nu med en uigennemtrængelig væg placeret på grænsen AB mellen de to områder (se Fig. 4). I væggen er der en lille åbning CD med bredden $d \ll (x_0 - x_1)$ og $d \ll x_1$. Betragt de to yderste mulige baner OCP og ODP, idet OCP er den klassiske bane diskuteret i Del A. Find faseforskellen $\Delta\varphi_{\mathrm{CD}}$ mellem de to baner til første orden.   **Figur 4** | **1.2** |

**D Stofbølge-interferens**

En elektronkanon i O skyder en parallel-stråle af elektroner mod den smalle åbning F i den ellers uigennemtrængelige væg $A_1B_1$ ved $x = x_1$, sådan at OFP er en ret linje, hvor P er et punkt på en lodret skærm i $x = x_0$ (se Fig. 5). Farten i område I er $v_1 = 2.0000 \times 10^7$ m s$^{-1}$ og $\theta = 10.0000^\circ$. Partiklens potentielle energi i område II er sådan, at $v_2 = 1.9900 \times 10^7$ m s$^{-1}$. Afstanden $x_0 - x_1$ er 250.00 mm. Se bort fra elektron-elektron vekselvirkninger.



**Figur 5**

| | | |
|---|---|---|
| D1 | Beregn den spændingsforskel $U_1$, der accelererer elektronerne i O, idet de starter i hvile. | **0.3** |
| D2 | Der laves nu en anden smal åbning G, identisk med F, i væggen $A_1B_1$ i en afstand 215.00 nm (1 nm = $10^{-9}$ m) under F (Fig. 5). Faseforskellen mellem de to de Broglie bølger, der ankommer til P fra henholdsvis F og G, betegnes $2\pi\beta$. Beregn $\beta$. | **0.8** |
| D3 | Beregn afstanden $\Delta y$ mellem P og det nærmeste punkt på skærmen, hvor ingen elektroner forventes at ramme. [Bemærk, at approksimationen $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta\cos\theta$ kan være nyttig.] | **1.2** |
| D4 | Strålen har et kvadratisk tværsnit på 500 nm × 500 nm, og opstillingen er 2 m lang. Beregn den minimale fluxtæthed $I_{\min}$ (antal elektroner pr. areal pr. tid), hvis der i gennemsnit er mindst en elektron i opstillingen ad gangen. | **0.4** |