Kosmisk inflation

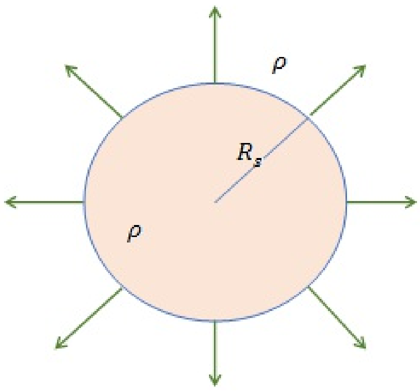
På grund af den relative bevægelse af galakserne i forhold til Jorden, vil spektrallinjerne fra en bestemt galakse som observeres fra Jorden være forskellige fra deres originale bølgelængder. Dette fænomen kaldes elektromagnetisk Doppler-effekt.

Man kunne forvente, at en vilkårlig samling galakser ville have tilfældige bølgelængdeændringer: nogle positive (rødforskydning) og nogle negative (blåforskydning). Imidlertid viser observationer at alle bølgelængder rødforskydes (bortset fra nogle af dem fra de nærmeste galakser). Dette fører til formodningen om at Universet udvider sig.

Hertil kommer, at Universet forekommer isotropt (dvs ens i alle retninger) og homogent (dvs. ens overalt) på længdeskalaer større end 100 Mpc, hvor 1 pc = 3,26 lysår.

Vi vil altså antage at Universet har uniform densitet, ρ, og at det udvider sig.

A. Universets udvidelse



I en simpel model af Universet betragter vi en ekspanderende kugle med uniform densitet, ρ, som er indlejret i et medium i en meget større kugle, men med samme densitet. På et bestemt (fast) tidspunkt er radius af den lille kugle R_s, mens den er $R(t)$ til tiden t. Udvidelsen af denne kugle kan beskrives ved den såkaldte *skalafaktor*, $a(t)$, som er givet ved $R(t) = a(t)R_s$.

Den første af de to såkaldte *Friedmann-ligninger* er

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1\rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \qquad (1)$$

hvor k er en dimensionsløs konstant. (Bemærk at differentiation mht tiden noteres med en prik over variabelnavnet).

Denne ligning kan udledes ved at bruge Newtons gravitationslov til at beregne hastigheden af et masse-element på overfladen af den lille kugle i vores model af Universet.

A.1	Bestem konstanten A_1 i ligning (1)	1.3 pt.

Diskussionen har indtil videre været ikke-relativistisk. Den kan imidlertid godt udvides til et relativistisk system, hvis man genfortolker $\rho(t)c^2$ som den totale energitæthed og vælger at se bort fra den gravitationelle potentielle energi. I dette relativistiske system kan man udlede den *anden Friedmann-ligning*:

$$\dot{\rho} + A_2\left(\rho + \left(\frac{p}{c^2}\right)\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \tag{2}$$

ved at bruge termodynamikkens første lov for et adiabatisk system, hvor c og p er henholdsvis lysets fart og trykket på kuglen.

A.2	Bestem konstanten A_2 i ligning (2)	0.9 pt.

Ligningerne (1) og (2) løses ved at antage, at der er en relation $p = p(\rho)$, f.eks. af formen $p(t)/c^2 = w\rho(t)$, hvor w er en konstant.

Derudover defineres den såkaldte *Hubble-parameter* $H = \dot{a}/a$.

Den nuværende værdi af de forskellige parametre benævnes med 0 som subskript; t_0, ρ_0, H_0, a_0 og så videre. Bemærk, at H_0 er det vi normalt kalder Hubble-konstanten). Som forenkling antager vi at $a_0 = 1$.

Universet begyndte med det såkaldte *Big Bang,* hvorunder der produceredes stråling af relativistiske partikler. I løbet af Universets udvidelse sker der en afkøling, og partiklerne bliver derved ikke-relativistiske.

Hvad fotoner angår, vil universets udvidelse gøre, at deres bølgelængde vokser proportionalt med skalafaktoren $a(t)$.

Nye observationer tyder på, at den del af Universets nuværende energitæthed, som hidrører fra den såkaldte *kosmologiske konstant* (fra Einsteins feltligninger), er det dominerende bidrag.

A.3	Bestem - i hvert af følgende tre tilfælde - værdien af w: (i) et univers bestående udelukkende af stråling (dvs. fotonenergi), (ii) et univers bestående udelukkende af ikke-relativistiske partikler (iii) et univers med konstant energitæthed.	1.2 pt.
A.4	Beregn, under antagelsen $k=0$, skalafaktoren $a(t)$ for hvert af tilfældene (i) til (iii) fra spørgsmål A.3. Benyt begyndelsesbetingelsen $a(0)=0$ i tilfælde (i) og (ii), og $a(0)=1$ i tilfælde (iii).	1.2 pt.

Konstanten k i ligning (1) er knyttet til klassifikationen af den rumlige geometri i Universet. Den kan antage en af tre værdier: $k=+1$ i et univers med positiv krumning (lukket), $k=0$ i et fladt univers (uendeligt), og $k=-1$ i et univers med negativ krumning (åbent, uendeligt).

Vi definerer nu et "tæthedsforhold" (*density ratio*) ved $\Omega=\rho/\rho_c$, hvor $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ er den kritiske energitæthed. Bemærk at værdien af A_1 kommer fra opgave A.1.

A.5	Udtryk k i ligning (1) ved Ω, H, a, og R_0.	0.1 pt.
A.6	Bestem intervaller for Ω som svarer til hver af værdierne $k=+1$, $k=0$ og $k=-1$.	0.3 pt.

B. Motivation for at introducere en "inflationsfase" og dennes generelle betingelser

Nylige observationer af den kosmiske baggrundsstråling (CMB) i mikrobølgeområdet viser, at det nuværende Univers er tilnærmelsesvist fladt. Det giver anledning til et dilemma: Enhver afvigelse fra fladhed vil vokse over tid (vises nedenfor), og derfor må Universet have været eksakt fladt fra starten.

B.1	Bestem $(\Omega(t)-1)$ som funktion af tiden for et univers, som domineres af stråling eller ikke-relativistisk stof (se opgave A.3).	0.5 pt.

For at løse det ovennævnte dilemma antager man, at Universet har gennemgået en periode, hvor energitætheden har været konstant, hvilket fører til en eksponentiel udvidelse af Universet, den såkaldte *inflationsperiode*.

B.2	Bestem $(\Omega(t)-1)$ som funktion af tiden i denne periode med konstant energitæthed. Antag at $(\Omega(t)-1) \ll 1$.	0.3 pt.
B.3	Vis at betingelsen for inflation medfører følgende tre betingelser: negativt tryk, accelereret udvidelse ($\ddot{a}>0$), og aftagende Hubble radius ($d(aH)^{-1}/dt<0$).	0.9 pt.

B.4	Vis at betingelsen om aftagende Hubble-radius kan udtrykkes vha parameteren $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ som $\epsilon < 1$.	0.2 pt.

Inflation forekommer, så længe $\epsilon < 1$, og den stopper, når $\epsilon = 1$.

Vi kan definere det såkaldte "*e-folding number*", N, ved $dN = d\ln a = Hdt$ og randbetingelsen $N = 0$ når inflationen slutter.

C. Inflation genereret af homogent fordelt stof

Som et eksempel på et simpelt fysisk system, hvori der kan forekomme et periode med inflation, betragter vi et univers domineret af homogent fordelt stof. Sådant stof kaldes *inflaton* og kan karakteriseres ved en funktion $\phi(t)$.

Den såkaldte *dynamiske ligning* for stoffet kan skrives som

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \tag{3}$$

hvor $V = V(\phi)$ er en potentialfunktion og $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. Hubble-parameteren opfylder

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right]. \tag{4}$$

hvor M_{pl} er den såkaldte *reducerede planckmasse,* en konstant. Inflationsfasen forekommer, når den potentielle energi, V, dominerer over den kinetiske energi, $\dot{\phi}^2/2$, i tilstrækkelig lang tid, således at leddet $\ddot{\phi}$ i ligning (3) kan negligeres. Denne betingelse kaldes "slow-roll" approksminationen.

Størrelserne ϵ og $\eta_V = \delta + \epsilon$, hvor $\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$, kaldes "*slow-roll*" parametre.

C.1	Estimér ϵ, η_V, og $dN/d\phi$ udtrykt ved potentialet $V(\phi)$ og dens afledte V' og V''.	1.7 pt.

D. Inflation med et simpelt potentiale

Forudsigelserne fra enhver inflationsmodel bør sammenlignes med de begrænsende bånd, der kommer fra CMB-observationer:

n_s = 0.968 ± 0.006 og r < 0.12, hvor $r = 16\epsilon$ og $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ er evalueret ved $\phi = \phi_{start}$ for den stofdominerede inflationsmodel.

Antag at potentialet har formen $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}}\right)^n$ hvor n er et heltal og Λ er en konstant.

D.1	Beregn ϕ_{end} ved slutningen af inflationsfasen.	0.5 pt.
D.2	Udtryk r og n_s ved "*e-folding*"-tallet N og heltallet n. Vurdér den værdi af n som passer bedst med de observerede værdier af r og n_s. Antag at N = 60 i din udregning.	0.9 pt.