

Mørkt Stof

Den første evidens for eksistensen af mørkt stof kom fra Fritz Zwicky, som havde observeret Coma galaksehoben, en galaksehob bestående af tusindvis af galakser. Zwicky benyttede det såkaldte *virialteorem* til at vurdere massen af galaksehoben. I et simpelt system bestående af en enkelt planet i cirkelformet kredsløb om en enkelt stjerne udtrykker virialteoremet, at planetens (konstante) kinetiske energi er proportional med dens (konstante) gravitationelle potentielle energi. I det generelle tilfælde (et system med mange partikler bundet sammen af en eller anden vekselvirkning) giver virialteoremet en sammenhæng mellem tidsgennemsnittet af systemets samlede kinetiske energi og tidsgennemsnittet af dets samlede potentielle energi.

I 1933 brugte Zwicky sine observationer af hastigheden af galakser nær kanten af Coma galaksehoben til at konkludere, at hoben må have mere masse end den, der kunne observeres visuelt, nemlig galaksernes masse. Med visuelt menes der her hele det elektromagnetiske spektrum.

Den gravitationelle tiltrækning fra den observerbare masse (galakserne) var for lille til at kunne forklare galaksernes hastigheder. Der må være noget "skjult masse", *mørkt stof*, som forårsagede de høje galaksehastigheder. I det følgende antages det, at massen af hver galakse er summen af dens synlige masse og massen af det mørke stof. Det antages også, at mørkt stof og synligt stof udelukkende vekselvirker gravitationelt.

A. Galaksehobe

Betragt en galaksehob bestående af et stort antal galakser samt mørkt stof, hvor både galakser og mørkt stof er homogent fordelt i en kugle med radius R og samlet masse (galakser plus mørkt stof) M . Antag at den gennemsnitlige totalmasse af en galakse (synligt og mørkt stof) er m , at der er N galakser, og at hele hoben er i termodynamisk ligevægt.

A.1	Antag at stoffet i galaksehoben (både synligt og mørkt) er kontinuert fordelt og bestem så den samlede gravitationelle energi af hoben, udtrykt ved M og R .	1.0 pt.
-----	--	---------

På grund af universets udvidelse vil ethvert fjernt objekt bevæge sig væk fra en Jord-baseret observatør med en fart, som afhænger af afstanden mellem objekt og observatør. En bestemt Lyman-spektrallinje (fra hydrogens spektrum) fra en supernova i galakse nummer i i galaksehoben observeres til at have frekvensen f_i , med $i = 1, \dots, N$, mens den samme Lyman-frekvens udsendt fra hydrogen på Jorden er f_0 .

A.2	Bestem den gennemsnitlige fart, V_{cr} , hvormed galaksehoben bevæger sig bort fra Jorden, udtrykt ved f_i (for $i = 1, \dots, N$), f_0 og N . Bemærk at farten af de enkelte galakser i hoben er lille sammenlignet med lysets fart c .	0.5 pt.
-----	---	---------

A.3	Antag at galaksernes hastigheder mht galaksehobens centrum er isotrope (dvs. ens i alle retninger) og bestem herved rms-farten ("root-mean-square"), v_{rms} , af galakserne mht galaksehobens centrum. Udtryk resultatet ved N , f_i (med $i = 1, \dots, N$), og f_0 . Brug dette resultat til at bestemme den gennemsnitlige kinetiske energi af en galakse mht galaksehobens centrum, udtrykt ved v_{rms} og m .	1.5 pt.
-----	--	---------

Man kan bruge virialteoremet til at finde galaksehobens samlede masse. I et system af partikler, der bindes sammen af deres indbyrdes konservative kræfter, siger virialteoremet, at

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

hvor $\langle K \rangle_t$ er tidsgennemsnittet af den samlede kinetiske energi, $\langle U \rangle_t$ er tidsgennemsnittet af den samlede potentielle energi, og γ er en proportionalitetskonstant. Udledningen af dette teorem (i næste opgave) kan baseres på en analyse af størrelsen

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

A.4	Benyt det faktum, at tidsgennemsnittet af $d\Gamma/dt$ over lang tid er nul, $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$, til at bestemme γ i virialteoremet for et system med gravitationel vekselvirkning. (Vink: begynd evt. med at opstille summationsudtrykket for Γ for et lille antal galakser).	1.7 pt.
A.5	Brug det forrige resultat til at udtrykke den samlede masse af det mørke stof i galaksehoben ved størrelserne N , m_g , R og v_{rms} , hvor m_g er den gennemsnitlige samlede synlige masse af en galakse. Bemærk at det mørke stof i en galakse bevæger sig sammen med galaksen.	0.5 pt.

B. Mørkt stof i en galakse

Der er også mørkt stof inde i og rundt om en galakse. Betragt nu en kugleformet galakse som har en synlig "kant"; altså en omtrentlig største afstand, hvor man kan se et større antal stjerner. Selvom der vil være et ubetydeligt antal af galaksens stjerner uden for denne "kant", vil vi stadig tale om en bestemt radius af galaksen og kalde den R_g . Antag at stjernerne i galaksen er punktformige partikler med gennemsnitlig masse m_s , som er fordelt homogent med antalstætheden n (altså antal stjerner per

rumfangsenhed). Antag også at alle stjerner bevæger sig i cirkelformede baner.

B.1	Antag først at der kun er stjerner i galaksen (altså ikke noget mørkt stof), og bestem så farten $v(r)$ for en stjerne som funktion af dens afstand til galaksens centrum og skitsér grafen for $v(r)$ for $r < R_g$ og $r \geq R_g$.	0.8 pt.
-----	--	---------

Hypotesen om eksistensen af mørkt stof kan baseres på den såkaldte *rotationskurve* for galaksen. Denne kurve er et plot af $v(r)$ baseret på observationer. Figuren nedenfor viser en typisk rotationskurve for en galakse. Vi vil antage, at $v(r)$ er en lineær funktion for $r \leq R_g$ og konstant med værdien v_0 for $r > R_g$.

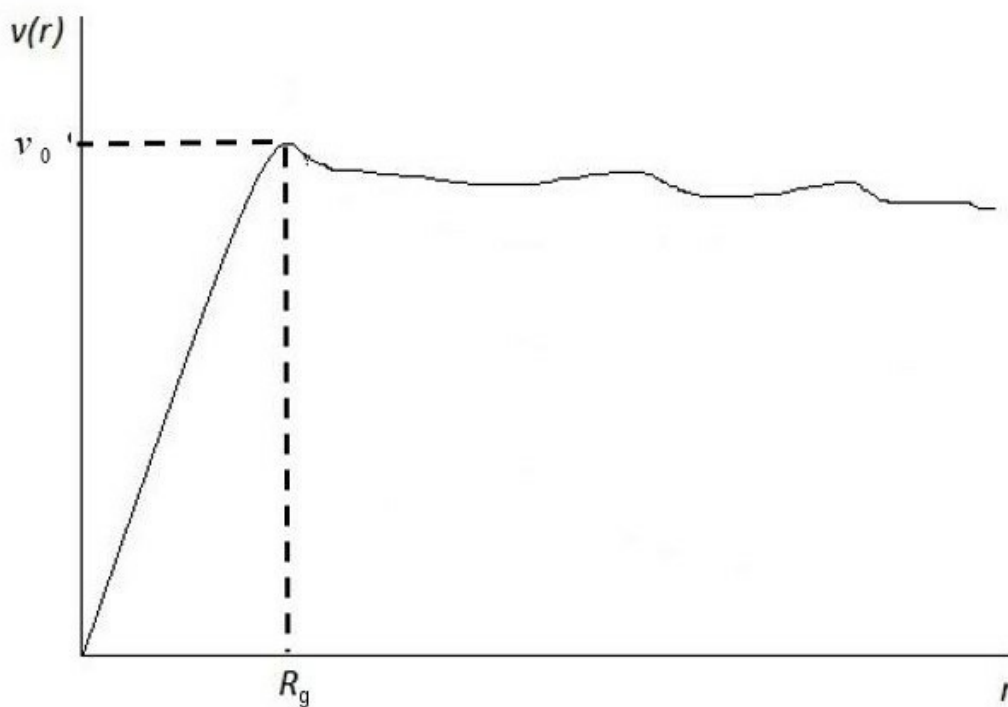


Fig. 1 Typisk rotationskurve for en galakse.

B.2	Bestem den totale masse m_R af den del af galaksen, der ligger inden for kuglen med radius R_g , udtrykt ved v_0 og R_g .	0.5 pt.
-----	---	---------

Forskellen mellem rotationskurven i Fig.1 (ovenfor) og den, du lavede i B.1, er belæg for eksistensen af mørkt stof.

B.3	Bestem densiteten af mørkt stof som funktion af r , R_g , v_0 , n , og m_s , både for $r < R_g$ og for $r \geq R_g$.	1.5 pt.
-----	---	---------

C. Interstellar Gas og Mørkt Stof

Betragt nu en ung galakse, hvis masse domineres af interstellar gas og mørkt stof (vi ser altså bort fra massen af stjernerne). Den interstellare gas antages at bestå af identiske partikler som hver har masse m_p . Antalstætheden, $n(r)$, og temperaturen af gassen, $T(r)$, afhænger af afstanden til galaksens centrum, r . Selvom der foregår mange fysiske processer i gassen, vil vi antage at gassen er i hydrostatisk ligevægt, hvilket vil sige, at der er balance mellem trykkræfter og gravitationelle kræfter.

C.1	Bestem trykgradienten i gassen, dP/dr , udtrykt ved $m'(r)$, r og $n(r)$. Her er $m'(r)$ den samlede masse af gas og mørkt stof inden for afstanden r fra galaksens centrum. Bemærk at notationen $m'(r)$ ikke har noget med differentiation at gøre.	0.5 pt.
C.2	Antag at den interstellare gas er en ideal gas, og bestem herved $m'(r)$ udtrykt ved $n(r)$, $T(r)$ og deres afledte med hensyn til r .	0.5 pt.

Nu antager vi, for enkelhedens skyld, at gassen er isotherm med temperatur T_0 , og at den interstellare antalstæthed er givet ved

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

hvor α og β er konstanter.

C.3	Bestem densiteten for det mørke stof som funktion af r inden i galaksen.	1.0 pt.
-----	--	---------