

## Viskoelasticitet af en polymertråd

Bemærk venligst, at tråden ikke må belastes før eksperimentet påbegyndes. Tænd straks vægten, da den er omkring 10 minutter om at varme op. Du må ikke ændre på indstillingen af vægten.

### Indledning

Når et fast stof udsættes for en ydre kraft deformeres det. For små påtrykte kræfter er deformationen proportional med kraften (Hookes lov) og deformationen er reversibel, hvilket betyder, at materialet genvinder sin oprindelige form, når kraften fjernes.

For et fast stof beskrives dette lettest ved at benytte begreberne *spænding* (eng: *stress*) og *relativ deformation* (eng: *strain*). Spændingen  $\sigma$  er defineret som kraften  $F$  pr. areal  $S$ , hvor  $S$  er det areal, som kraften virker på. Den relative deformation  $\epsilon$  betegner den relative længdeændring af det faste stof:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{og} \quad \epsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}, \quad (1)$$

hvor  $\ell$  og  $\ell_0$  er henholdsvis slut- og begyndelsesværdien af længden, når kraften bliver påtrykt. Ved simpel elastisk opførsel er spændingen ganske enkelt proportional med den relative deformation, så  $\sigma = E \epsilon$  (Hookes lov) og proportionalitetskonstanten  $E$  betegnes *Youngs modul*.

Den simple elastiske opførsel beskrevet ved Hookes lov er en approksimation, som kun er gyldig for tilpas små spændinger. For højere spændinger bliver ændringerne gradvist irreversible, og materialet kommer ind i det såkaldte plasticitetssområde, hvor molekylerne bevægelser begynder at minde om molekylerne bevægelse i en væske med gnidning (viskøs væske). Det betyder således, at materialet nærmest bliver til en væske, når det strækkes eller komprimeres ud over sin elastiske grænse.

### Viskoelastiske materialer

Visse materialer har både faste og viskøse egenskaber, og de betegnes derfor som *viskoelastiske*.

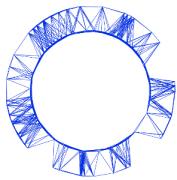
Når man har at gøre med et viskoelastisk materiale, er det rimeligt at adskille det rent elastiske bidrag til den relative deformation fra det viskøse bidrag, så den samlede spænding  $\sigma$ , der er nødvendig for en given relativ deformation  $\epsilon$ , er summen af et rent elastisk bidrag  $\sigma_0 = E_0 \epsilon_0$  og et viskoelastisk bidrag  $\sigma_1$ :

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \quad (2)$$

Begge spændingsbidrag antages at svare til samme relative deformation ( $\epsilon = \epsilon_0 = \epsilon_1$ ). Imidlertid modelleres den relative deformation  $\epsilon_1$  svarende til det viskoelastiske bidrag normalt som en sum af en rent elastisk relativ deformation,  $\epsilon_1^e = \sigma_1 / E_1$ , og en rent viskøs relativ deformation,  $\epsilon_1^v$ , (begge udsat for samme spænding  $\sigma_1 = \sigma_1^e = \sigma_1^v$ ):

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^e + \epsilon_1^v \quad (3)$$

## Experiment



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q2-2

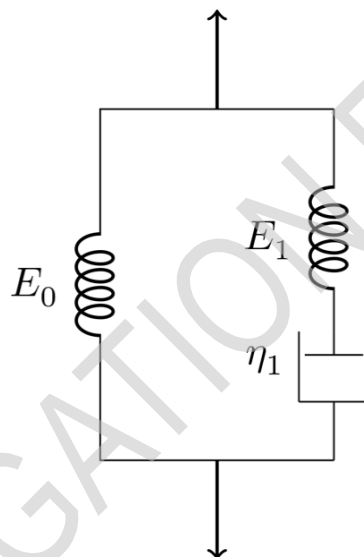
Danish (Denmark)

I den rent viskøse proces er der en lineær sammenhæng mellem spændingen og den tidsafledede af den relative deformation (på samme måde som for andre typer gnidning i væsker),

$$\sigma_1 = \eta_1 \frac{d\epsilon_1^v}{dt},$$

hvor  $\eta_1$  er viskositetskoefficienten.

Denne fænomenologiske model kaldes for *den standard lineære faste model* af viskoelasticitet og er illustreret på Fig. 1, hvor fjedrene repræsenterer rent elastiske komponenter og den væskefyldte beholder repræsenterer den rent viskøse komponent.



Figur 1. Standard lineær fast model af lineær viskoelasticitet.

Fra de ovenstående ligninger fremkommer følgende relation:

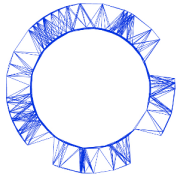
$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \quad (4)$$

Det er derfor inden for den standard lineære model for viskoelasticitet muligt at vise, at

$$\sigma = E_0 \epsilon + \tau_1 (E_0 + E_1) \frac{d\epsilon}{dt} - \tau_1 \frac{d\sigma}{dt} \quad (5)$$

hvor  $\tau_1 = \eta_1 / E_1$ . Denne differentialligning viser, at relationen mellem spænding og relativ deformation nu ikke længere er lineær, og at spænding og deformation begge generelt er tidsafhængige størrelser. For at finde  $\epsilon(t)$  er det nødvendigt at specificere funktionen  $\sigma(t)$  og omvendt.

To specialtilfælde er af praktisk betydning, nemlig når enten  $d\epsilon/dt = 0$  eller  $d\sigma/dt = 0$ . De to tilfælde benævnes henholdsvis *spændingsrelaxeringsbetingelsen* og *krybebetingelsen*. I det førstnævnte tilfælde påtrykkes materialet hurtigt en spænding, der holdes konstant som funktion af tiden, så  $d\epsilon/dt = 0$ .



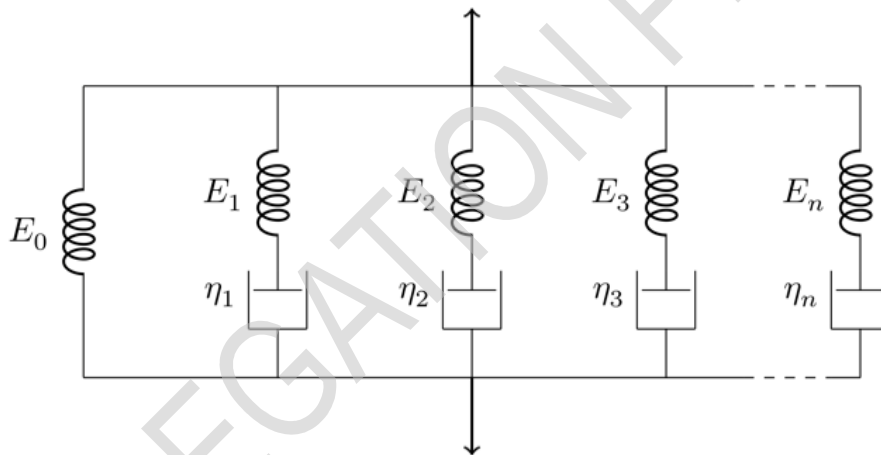
Funktionen  $\sigma(t)$  er da kun afhængig af materialets viskoelastiske parametre, og løsningen til ligning (5) er

$$\sigma(t) = \epsilon(E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1}) \quad (6)$$

hvor kun de rent elastiske bidrag findes til tiden  $t = 0$ , og der derfor gælder at  $\sigma(t = 0) = \epsilon(E_0 + E_1)$ . Denne løsning viser, at den viskoelastiske spænding aftager eksponentielt med tiden, med en tidskonstant på  $\tau_1$ .

## Multi-viskoelastiske processer

Den standard lineære model kan ret let udvides til at inkludere mange viskoelastiske processer, som vist på Fig. 2.



Figur 2. Generaliseret model for multi-viskoelastiske processer.

For  $N$  viskoelastiske komponenter haves, at

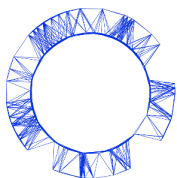
$$\sigma = \sigma_0 + \sum_k \sigma_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

hvor  $\frac{d\epsilon_k}{dt} = \frac{1}{E_k} \frac{d\sigma_k}{dt} + \frac{\sigma_k}{\eta_k}$  og som ovenfor, at  $\frac{d\epsilon_0}{dt} = \frac{d\epsilon_k}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt}$ .

Den følgende generalisering af ligning (5) kan derfor benyttes:

$$\sigma = E_0 \epsilon + \eta_t \frac{d\epsilon}{dt} - \sum_k \tau_k \frac{d\sigma_k}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

hvor  $\eta_t = \sum_k \eta_k$  og  $\tau_k = \eta_k / E_k$ .

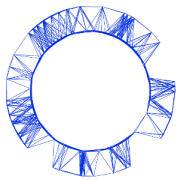


Når den relative deformation er konstant, vil de forskellige viskoelastiske spændinger stadig aftage eksponentielt med tiden, så  $\sigma_k = A_k e^{-t/\tau_k}$ , hvilket fører til løsningen:

$$\sigma(t) = \epsilon \left( E_0 + \sum_k E_k e^{-t/\tau_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

hvor det er antaget, at der til  $t = 0$  kun findes rent elastiske komponenter af den samlede spænding, så  $\sigma_0 = \epsilon(E_0 + \sum_k E_k)$ . Den resulterende viskoelastiske bevægelse er tydeligvis ikke-lineær.

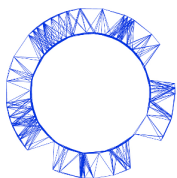
DELEGATION PRINT



### Eksperimentelt udstyr

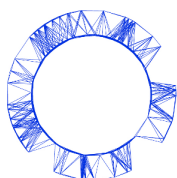
Der stilles følgende apparatur til rådighed for den eksperimentelle opgave (se Fig. 3):

1. Et stativ med en holder til at fastgøre en laserpointer og en holder i toppen til at fastholde en tråd, der strækkes lodret med konstant relativ deformation over en vægt.
2. Et masse-sæt bestående af en hul, cylinderformet masse og en fastgørelsesskrue til at fastgøre tråden til massen.
3. En lang termoplastisk polyurethan (TPU) tråd til fastgørelse til masse-sættet og en anden fastgørelsesskrue til ophængning af tråden fra holderen i toppen af stativet.
4. En kort TPU tråd fastgjort til en enkelt fastgørelsesskrue.
5. En laserpointer og en tilhørende holder.
6. en digitalvægt.
7. To plane spejle.
8. Et stopur.
9. En lineal.
10. Et metalmålebånd.
11. Et stykke A4 papir beregnet til at fungere som en skærm.
12. En fjederklemme til at fastholde laseren og til at holde den tændt.



Figur 3. Apparatur til denne eksperimentelle opgave.

## Experiment



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q2-7

Danish (Denmark)

### Del A: Måling af hvordan spændingen aftager (1.9 point)

Bemærk venligst, at tråden ikke må belastes før eksperimentet påbegyndes! Hvis tråden ved et uheld skulle blive belastet forkert, så bed om en ny, men vær opmærksom på, at det tager tid, og at du dermed har mindre tid til rådighed til dit eksperiment.

Læs grundigt oplysningerne angivet i "Del D: Databehandling" før du starter målinger i denne del, så du bedst muligt kan planlægge, hvordan målingerne skal foretages.

**A.1** Mål længden af den *ikke*-strukne tråd mellem skruehovederne. For at bestemme den samlede trådlængde  $\ell_0$  inklusive den del af tråden, der er inde i skruehovederne, skal der lægges to gange 5mm gange til. Skriv dit svar for den målte trådlængde  $\ell_0$  og angiv usikkerheden på denne. 0.3pt

**A.2** Mål den samlede vægt af masse-sættet,  $P_0$  målt i enheden gram-force (gf). Husk, at 1 gram-force er kraften svarende til vægten af en masse på 1 gram ( $1 \text{ gf} = 9.80 \times 10^{-3} \text{ N}$ ). Skriv dit svar på svararket sammen med dit estimat af usikkerheden. 0.3pt

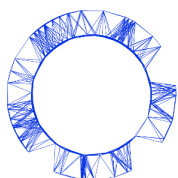
For eksperimentelt at kunne observere hvordan spændingen aftager, er det nødvendigt at måle denne i tilstrækkeligt langt tid. I dette tilfælde skal tidsudviklingen af spændingen måles gennem ca. **45 minutter**.

Du skal nu udføre to samtidige handlinger 1. og 2. Læs venligst instruktionerne grundigt før du starter.

Vigtigt: Hvis eksperimentet af den ene eller anden grund bliver afbrudt, kan det ikke genoptages. Det skal startes forfra med en ny tråd. I så fald skal du bede om en ny tråd.

Udfør følgende handlinger samtidig:

1. Mens masse-sættet fastholdes på vægten strækkes tråden, så fastholdelsesskruen i den modsatte ende kan placeres i holderen øverst i stativet.
2. Start uret samtidig med handling 1.



Figur 4. Sådan hænges tråden op, når målingerne skal startes.

- |            |   |       |
|------------|---|-------|
| <b>A.3</b> | Nedskriv vægtens visning, $P(t)$ , og det tilsvarende tidspunkt $t$ , igennem ca. 45 minutter. Benyt tabellen på svararket.                             | 1.0pt |
| <b>A.4</b> | Mål længden $\ell$ af den strukne tråd og vurder den tilsvarende usikkerhed. Skriv på svararket den målte værdi af $\ell$ og den tilhørende usikkerhed. | 0.3pt |

## Del B: Måling af den strukne tråds diameter (1.5 point)

Se aldrig direkte ind i laseren! Når laseren ikke benyttes bør den slukkes.  
Hvis du har problemer med at opnå et diffraktionsmønster, skal du bede om en ny laser.

I denne del af eksperimentet skal du benytte diffraktion af laserlyset til at måle polymertrådens diameter. Den nominelle værdi af den ustrakte tråd er 0.5 mm. Som du måske ved, er diffraktionsmønsteret fra en rektangulær spalte med bredde  $d$  det samme som fra et cylinderformet objekt med samme diameter  $d$  som spalten. Diffraktionsmønsteret observeres på en skærm, og afstanden mellem diffraktionsminima vil for små afbøjningsvinkler for både spalte og cylinder (forudsat at afstanden fra spalte/cylinder til skærmen er meget større end  $d$ ) være givet ved:

$$d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

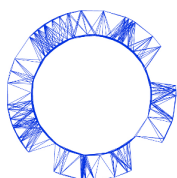
hvor  $\theta$  er afbøjningsvinklen.

Laserlyset fra laseren har bølgelængden  $\lambda = 650 \pm 10$  nm.

For at udføre denne del af eksperimentet skal du gøre følgende:

1. Tænd for laseren ved at benytte fjederklemmen (se Fig. 5).
2. Positionér laseren, så strålen rammer tråden direkte.

## Experiment



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q2-9

Danish (Denmark)

3. Udnyt de udleverede materialer til at opfinde en metode til at få projiceret diffraktionsmønsteret op på papirskærmen, og få foretaget de nødvendige målinger til bestemmelse af trådens diameter ved at bruge ligning (10).



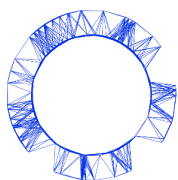
Figur 5. Sådan tændes laseren ved hjælp af fjederklemmen.

<b>B.1</b>	Lav på svararket en skitse af den opstilling du opfandt til bestemmelse af trådens diameter.	0.6pt
<b>B.2</b>	Mål den optiske vejlængde $D$ mellem tråden og diffraktionsmønsteret på skærmen. Skriv dit svar på svararket sammen med en vurdering af usikkerheden på målingen.	0.3pt
<b>B.3</b>	Bestem den gennemsnitlige afstand $\bar{x}$ mellem diffraktionsminimaene. Skriv dit svar på svararket sammen med en vurdering af usikkerheden.	0.3pt
<b>B.4</b>	Benyt ligning (10) på dine diffraktionsdata til at beregne diameteren $d$ af polymertråden og angiv usikkerheden på målingen. Skriv begge størrelser på svararket.	0.3pt

### Skift til en ny tråd

Før du fortsætter med databehandlingen (**del D**) skal du gøre opstillingen klar til målinger på den korte tråd (**del E**).

Afmontér masse-sættet fra den lange tråd (skru den af) og fastgør masse-sættet til den frie ende af den korte tråd (sæt tråden gennem hullet og lås tråden fast med skruehovedet, se Fig. 6)



Hvis du ikke er i stand til at få tråden gennem hullet, da bed om hjælp.



Figur 6. Montering af polymertråden i fastgørelsesskruen.

- C.1** Mål den *ikke*-strukne længde  $\ell'_0$  af tråden som i **A.1**. Skriv svaret på svararket sammen med et skøn over usikkerheden på målingen. 0.3pt

Ophæng den nye tråd i det øvre ophæng, så massen udøver en konstant spænding på tråden. Tråden vil efterhånden, mens du arbejder på databehandlingen, nå den stationære værdi for den relative forlængelse  $\epsilon = \sigma/E$ . **Tråden bør være ophængt i mindst 30 minutter.**

## Del D: Databehandling (5.7 point)

N.B. Tyngdeaccelerationen har i Lissabon værdien  $g = 9.80 \text{ ms}^{-2}$ .

- D.1** Beregn kraften  $F$  på tråden, målt i enheden gf, for alle datapunkter og udfyld den tilsvarende søjle i tabellen benyttet i **A.3**. 0.3pt

- D.2** Afbild  $F(t)$  på grafpapiret på svararket. 0.4pt

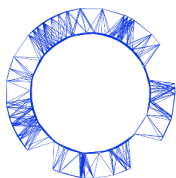
Da vægtskiven ikke flytter sig nævneværdigt, kan målingerne betragtes som udført ved konstant relativ forlængelse, og ligning (9) kan benyttes. Forholdet  $\frac{\sigma}{\epsilon}$  kan skrives som  $\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F$ , hvor  $\beta$  er en konstant. Derfor gælder:

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F(t) = E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1} + E_2 e^{-t/\tau_2} + E_3 e^{-t/\tau_3} + \dots \quad (11)$$

hvor summen for overskuelighedens skyld er ordnet, så  $(\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \dots)$ .

- D.3** Bestem den konstante relative forlængelse  $\epsilon$  og den tilsvarende usikkerhed. Skriv værdierne på svararket. 0.3pt

- D.4** Beregn faktoren  $\beta$  ved hjælp af  $\sigma$  (målt i SI-enheder) og  $F$  (målt i gf-enheder). Skriv værdierne på svararket (ingen usikkerheder). 0.3pt



- D.5** Betragt målingerne på grafen benyttet under **D.2**. Målingerne kan ikke forklares ud fra en rent elastisk proces. Skitsér på grafpapiret på svararket hvad du vil forvente for  $F(t)$  for det rent elastiske tilfælde. 0.4pt

Det er lettere at foretage databehandlingen, hvis du benytter  $\frac{dF}{dt}$  i stedet for  $F(t)$ , idet tidskonstanterne da kan udledes ved en række trin. For at gøre dette skal den tidsafledede  $\frac{dF}{dt}$  beregnes i hvert eneste punkt. Dette kan gøres grafisk eller numerisk. I det simple tilfælde, hvor målingerne hele tiden er foretaget med det samme tidsinterval, er en talværdi for den afledede af en funktion  $f(t)$  i et punkt  $t_i$  for et datasæt  $(t_1, f_1), (t_2, f_2), (t_3, f_3), \dots$  tilnærmelsesvist givet ved

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (12)$$

hvor  $h$  er et (konstant) interval mellem punkterne og  $N$  er antallet af punkter.

Hvis tidsintervallerne mellem datapunkterne ikke er ens, vil talværdien for den afledede tilnærmelsesvist være givet ved

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_i = \frac{h_-^2 f_{i+1} - h_+^2 f_{i-1} + (h_+^2 - h_-^2) f_i}{h_+^2 h_- + h_+ h_-^2} \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (13)$$

hvor  $h_+ = (t_{i+1} - t_i)$  og  $h_- = (t_i - t_{i-1})$  og  $N$  er antallet af datapunkter. Udtrykket repræsenterer gennemsnittet af den aflededes værdi til venstre og til højre, divideret med tidsintervallet.

For at analysere data og uddrage de relevante parametre er det nødvendigt at udføre en række beregningstrin. Givet summen i ligning (11), gør da følgende:

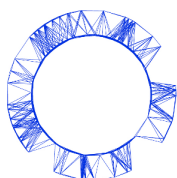
- D.6** Antag, at dit datasæt strækker sig over et tidsrum, der er længere end værdien af  $\tau_2$  og beregn den afledede  $\frac{dF}{dt}$  for datapunkter  $t > 1000$  s. Skriv værdierne i tabellen benyttet i **A.3**. Hvis du i stedet benytter en grafisk metode til at bestemme de afledede  $\frac{dF}{dt}$ , benyt da grafpapiret på svararket. 0.5pt

- D.7** Skriv på svararket et udtryk for den forventede tidsafhængighed af  $\frac{dF}{dt}$ , når der kun er én viskoelastisk proces. 0.3pt

- D.8** Bestem ved en grafisk metode parametrene  $E_1$  og  $\tau_1$  i SI-enheder ud fra datapunkterne i **D.6**. Skriv værdierne for  $E_1$  og  $\tau_1$  på svararket (uden usikkerheder). 1.0pt

- D.9** Bestem ud fra datapunkterne i **D.6** en værdi for  $E_0$  målt i SI-enheder. Skriv værdien på svararket (uden usikkerhed). 0.3pt

- D.10** Udfyld søjlen  $y(t)$  i tabellen benyttet i **A.3** ved at fratrække de rent elastiske og de længstvarende viskoelastiske bidrag fra  $F(t)$  (punkterne benyttet i **D.6** skal ikke tages i betragtning). 0.3pt



- |             |   |       |
|-------------|---|-------|
| <b>D.11</b> | Bestem ud fra $y(t)$ (se <b>D.10</b> ) ved en grafisk metode parametrene for den anden viskoelastiske komponent $E_2$ og $\tau_2$ (i SI-enheder). Skriv værdierne for $E_2$ og $\tau_2$ på svararket (uden usikkerheder). | 1.0pt |
|-------------|---|-------|

Yderligere viskoelastiske komponenter kan udledes på lignende vis.

- |             |   |       |
|-------------|---|-------|
| <b>D.12</b> | Identificér det tidsvindue $[t_i, t_f]$ som er relevant for den tredje viskoelastiske komponent. Skriv $t_i$ og $t_f$ på svararket (uden usikkerheder). | 0.3pt |
|-------------|---|-------|

- |             |  |       |
|-------------|--|-------|
| <b>D.13</b> | Estimér værdien (målt i SI-enheder) for $\tau_3$ ved at benytte grafen fra <b>D.11</b> . Skriv dit svar på svararket (du skal ikke angive nogen usikkerhed). | 0.3pt |
|-------------|--|-------|

## Del E: Måling af $E$ ved konstant spænding (0.6 point)

Du kan nu vende tilbage til at måle på den korte tråd, som du ophængte i forbindelse med **del C**. Sørg for, at der er gået mindst 30 minutter efter tråden blev ophængt. Du kan da roligt antage, at tråden har nået sin stationære værdi for den relative forlængelse  $\epsilon = \sigma/E$ .

- |            |   |       |
|------------|---|-------|
| <b>E.1</b> | Bestem $E$ direkte ud fra længden af den strukne tråd. Skriv svaret på svararket sammen med den relative forskel målt i forhold til den værdi for $E_0$ , som du fandt i <b>del D</b> . (ingen usikkerheder). | 0.6pt |
|------------|---|-------|