LIGO-GW150914 (10 point)

I 2015 detekterede gravitationsbølge-observatoriet LIGO for første gang at en gravitationsbølge (*eng: gravitational wave = GW*) passerede gennem Jorden. Denne begivenhed, benævnt GW150914, blev udløst af bølger udsendt fra to sorte huller, der kredsede om hinanden i næsten cirkulære baner. I denne opgave skal du estimere nogle af de fysiske parametre i dette system ud fra det detekterede signal.

Del A: Newtonske (konservative) baner (3.0 point)

A.1 Betragt et system med to stjerner med masser M_1, M_2 i position $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ henholdsvis, og med positionerne målt ud fra massemidtpunktet af systemet, dvs. — 1.0pt

$$M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2 = 0\,. \tag{1}$$

Stjernerne er isoleret fra resten af universet og bevæger sig med ikke-relativistiske hastigheder. Ved at benytte Newtons love er accelerationen af massen M_1 givet ved

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\frac{\vec{r}_1}{r_1^n}\,, \tag{2}$$

hvor $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$.
Bestem det hele tal $n \in \mathbb{N}$ og bestem formlen for $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$, hvor G er gravitationskonstanten. [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$].

A.2 Den samlede energi af systemet bestående af de to masser kan, når bevægelsen er cirkulær, skrives som: — 1.0pt

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G\frac{M\mu}{L}\,, \tag{3}$$

hvor

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\,, \qquad M \equiv M_1 + M_2\,, \tag{4}$$

er henholdsvis den *reducerede masse* og den *samlede masse* af det binære system. Banefrekvensen for hver masse betegnes Ω, og L *betegner den samlede afstand mellem de to objekter, dvs.* $L = r_1 + r_2$.
Udled formlen for $A(\mu, \Omega, L)$.

A.3 Ligning 3 kan forenkles til $E = \beta G\frac{M\mu}{L}$. — 1.0pt
Bestem talværdien for β.

Del B: Der indføres et relativistisk energitab (7.0 point)

Den korrekte teori for gravitation, *generel relativitetsteori*, blev formuleret i 1915 af Einstein. Den forudsiger, at gravitation udbreder sig med lysets fart. Gravitationsbølger (GW) formidler at en vekselvirkning finder sted og gravitationsbølgerne udsendes, når en masse accelereres, hvilket får systemet til at miste energi.

Betragt et system af to punktformede partikler, isoleret fra resten af Universet.

Einstein viste, at for tilpas små hastigheder gælder for de udsendte gravitationsbølger, at

1) De har en frekvens, der er det dobbelte af banefrekvensen

2) Den effekt $\mathcal{P}$ (luminositet) som bølgerne udsendes med, er i al væsentlighed givet ved Einsteins kvadrupolformel:

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\mathrm{d}^3 Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3} \right) \left(\frac{\mathrm{d}^3 Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3} \right) . \tag{5}$$

Her er c er lysets fart, $c \simeq 3 \times 10^8$m/s. For et system af to punktformede partikler (A og B), der bevæger sig omkring hinanden i $x-y$ planen er Q_{ij} givet ved følgende tabel, hvor *i* angiver rækkenummer og *j* angiver søjlenummer:

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} \left(2x_A^2 - y_A^2\right) , \qquad Q_{22} = \sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} \left(2y_A^2 - x_A^2\right) , \qquad Q_{33} = -\sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} \left(x_A^2 + y_A^2\right) , \tag{6}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^{2} M_A \, x_A \, y_A , \tag{7}$$

og $Q_{ij} = 0$ for alle andre muligheder. Her er (x_A, y_A) positionen af masse A i massemidtpunktssystemet.

B.1 For de cirkulære baner beskrevet i A.2 kan komponenterne i Q_{ij} udtrykkes som funktion af tiden t ved 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} \left(a_i + b_i \cos kt\right) , \qquad Q_{ij} \overset{i \neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2} \, c_{ij} \sin kt . \tag{8}$$

Bestem k udtrykt ved Ω og talværdierne af konstanterne a_i, b_i, c_{ij}.

B.2 Vis, at den udstrålede effekt $\mathcal{P}$ udsendt af i form af gravitationsbølger fra systemet er givet ved: 1.0pt

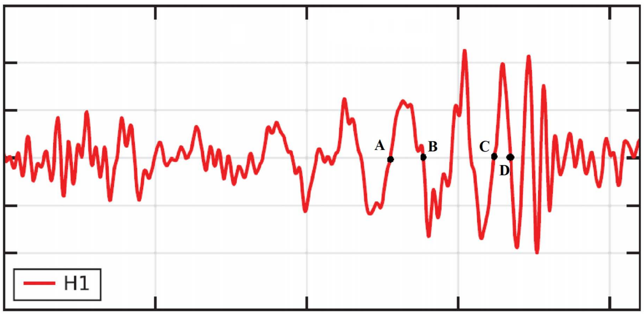
$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6 . \tag{9}$$

Bestem talværdien for ξ.
[Hvis du ikke er i stand til at bestemme talværdien for ξ, , benyt da i stedet værdien $\xi = 6.4$ i det følgende].

B.3	Hvis der ikke blev udsendt gravitationsbølger, ville de to masser hele tiden bevæge sig i samme cirkulære bane. Imidlertid giver udsendelsen af gravitationsbølgerne anledning til, at systemet taber energi og langsomt bevæger sig i stadigt mindre cirkulære baner. Vis, at den tidslige ændring af frekvensen for banebevægelsen, $\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$, er givet ved: $$\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_\mathrm{c})^5 \,, \qquad (10)$$ hvor M_c betegner den såkaldte *chirp masse*. Bestem et udtryk for M_c som funktion af M og μ. Denne masse er bestemmede for forøgelsen af banefrekvensen for de stadigt mindre cirkelbaner. [Navnet *"chirp"* (da: "pip") er inspireret af den højfrekvente lyd med stigende frekvens, som små fugle kan lave].	1.0pt

B.4	Benyt tidligere udtryk og oplysninger til at relatere frekvensen for banebevægelsen Ω til frekvensen af gravitationsbølgerne f_GW. Det oplyses, at for enhver differentiabel funktion $F(t)$ med $a \neq 1$ gælder, at $$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \chi F(t)^a \qquad \Rightarrow \qquad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0)\,, \qquad (11)$$ hvor χ er en konstant og $t_0$er en integrationskonstant. Vis, at ligning (10) medfører, at frekvensen af gravitationsbølgerne f_GW da er givet ved: $$f_\mathrm{GW}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p} (t_0-t)^{2-p} \qquad (12)$$ og bestem talværdien for konstanten p.	2.0pt

Den 14. september 2015 blev GW150914 målt af LIGOs detektorer, som består af to L-formede arme, hver med længden 4 km. Disse detektor-arme udviste en relative længdeændring som illustreret på Fig. 1. Detektorarmene reagerer lineært på en passerende gravitationsbølge og målingerne følger bølgens udsving. Gravitationsbølgen kom fra to sorte huller i omtrentlig cirkulær banebevægelse. Energitabet fra de udsendte gravitationsbølger fik baneradius til gradvist at skrumpe, indtil de to sorte huller til slut kolliderede. Kollisionstidspunktet svarer omtrent til toppen af signalet efter punktet mærket med D på Fig. 1.



Figur 1. Den relative variation i længden hver arm i LIGO-detektor H1. Den horisontale akse angiver tiden og punkterne A, B, C og D svarer til tidspunkterne $t = 0.00, 0.009, 0.034, 0.040$ sekunder, henholdsvis.

B.5 Benyt grafen til at estimere $f_{\text{GW}}(t)$ til tidspunkterne **1.0pt**

$$t_{\overline{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{and} \quad t_{\overline{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \tag{13}$$

Antag, at ligning (12) er gyldig hele vejen indtil kollisionen indtræffer (dette er strengt taget ikke helt rigtigt) og at de to objekter har samme masse.
Bestem en tilnærmet værdi for chirp-massen M_c og systemets samlede masse *M*, målt i enheder af Solens masse $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg.

B.6 Estimér den mindste indbyrdes afstand mellem de to objekter til tidspunktet $t_{\overline{CD}}$. **1.0pt**
Benyt dette til at estimere den maksimale størrelse af hvert objekt, R_{max} og udregn $R_\odot / R_{\text{max}}$ for at sammenligne størrelsen af hvert objekt med Solens radius, $R_\odot \simeq 7 \times 10^5$ km.
Estimér også objekternes banefart v_{col} til det samme tidspunkt, og sammenlign banefarten med lysets fart ved at beregne v_{col}/c.

Du skulle gerne nå frem til, at dette er ekstremt hurtige, meget kompakte objekter!